UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2017/2018**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Durée 2 h

Contrôle Terminal

Documents, téléphones portables, calculatrices sont interdits.
Justifier toute réponse. À moins que l'énoncé d'une question ne vous dise le contraire, vous pouvez utiliser librement les résultats du cours sans les redémontrer. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1. Considérons le système : $S = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & y & - & 2z & = & a \\ x & + & y & + & z & = & b \\ x & & & + & z & = & 0 \end{array} \right.$

(a) Quelle est la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ de ce système ? Calculer sa matrice inverse A^{-1}.

(b) Résoudre le système S

(i) en calculant $A^{-1}B$ pour $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) en utilisant les formules de Cramer.

Exercice 2.
On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^4$ est la suivante : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Que peut-on dire a priori (à l'aide des théorèmes du cours et sans calcul) sur les valeurs propres et les espaces propres de f ?

(b) Est-ce que le vecteur $u = (1, -1, -1, 1)$ est un vecteur propre de f ? Si oui pour quelle valeur propre ? Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}_F$ de l'espace propre F associé à cette valeur propre.

(c) Déterminer un vecteur non nul v orthogonal à F. Vérifier que v est un vecteur propre de f.

(d) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de f.

(e) Écrire la matrice A' de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer une matrice orthogonale P telle que $A' = P^{-1}AP$.

(f) Quel est le rang de la matrice A ? Quel est son déterminant ? Quel est son polynôme caractéristique ? Justifier vos réponses.

Exercice 3.

Partie 1 : Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E de dimension finie et soit u un vecteur de E.

(a) Rappeler la définition du projeté orthogonal $pr_F^{\perp}(u)$ de u sur F.

(b) Soit $v \in F$. Montrer que $\|u - pr_F^{\perp}(u)\| \leq \|u - v\|$.

Partie 2 : On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Notons par F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par les polynômes 1 et X. Calculer le projeté orthogonal de X^2 sur F.

(c) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ qui minimisent $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \mathrm{d}t$.
(Vous pouvez utiliser le résultat de la Partie 1.)