UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2016/2017**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Durée 2 h

Contrôle Terminal

Documents, téléphones portables, calculatrices sont interdits.
Justifier toute réponse. À moins que l'énoncé d'une question ne vous dise le contraire, vous pouvez utiliser librement les résultats du cours sans les redémontrer. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1. On donne la matrice suivante dans $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Étudier le comportement quand n tend vers l'infini de la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de premier terme $U_0 = (2,3)$, définie pour $n \geq 0$ par $U_{n+1} = AU_n$.
(Indice : on pourra chercher une base composée de vecteurs propres de A)

(b) Est-ce que la réponse dépend du premier terme U_0 ? Justifier.

Les vecteurs propres de A sont : $V = (1,1)$ de la valeur propre $0,5$ et $W = (1,-1)$ de la valeur propre 1. On écrit U_0 dans la base $\{V, W\}$: $U_0 = 2,5V - 0,5W$. Alors

$$U_n = A^n U_0 = 2,5A^n V - 0,5A^n W = 2,5(0,5)^n V - 0,5(1^n)W \to -0,5W.$$

En général, si $U_0 = aV + bW$ alors $U_n = a(0,5)^n V + b(1^n)W \to bW$.

Exercice 2.
On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ est la suivante :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Que peut-on dire a priori (à l'aide des théorèmes du cours et sans calcul) sur les valeurs propres et les espaces propres de f ?
A est symétrique à coefficients réels. Alors, par un théorème du cours, les valeurs propres de A sont réelles et elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Les espaces propres de A sont deux-à-deux orthogonaux.

(b) Est-ce que le vecteur $(1,0,1)$ est un vecteur propre de f ? Si oui pour quelle valeur propre ? Déterminer une base orthonormée de l'espace propre F associé à cette valeur propre.

Le vecteur $(1,0,1)$ est vecteur propre de f pour la valeur propre 1. L'espace propre F correspondant à la valeur propre 1 a pour équation $x_1+x_2-x_3=0$ dans $\mathbb{R}^3$. Une base de F est $((1,0,1),(0,1,1))$. Grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt, on trouve une base orthogonale ((1, 0, 1), (-1, 2, 1)) puis une base orthonormée de F :

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)).$$

(c) Déterminer toutes les valeurs propres de f et les espaces propres associés. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
Comme A est symétrique, la multiplicité de la valeur propre 1 est égale à la dimension de l'espace propre associé $E_1 = F$ qui est 2. Il reste donc une valeur propre simple λ, dont l'espace propre associé est de dimension 1. C'est l'orthogonal de F engendré par $(1,1,-1)$. Donc $\lambda = 0$. Une base orthonormée de $E_{-1} = F^{\perp}$ est $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$. On va prendre $\mathcal{B} = ((\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1))$.

(d) Écrire la matrice A' de l'application f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer une matrice orthogonale P telle que $A' = P^{-1}AP$. Calculer les puissances de A.
La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est donc

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est formée des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ comme vecteurs colonnes

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Notons que f est une projection $f \circ f = f$, ça résulte de $(A')^2 = A'$. Comme conslusion $(A')^n = A'$, pour $n \geq 1$, et $A^n = A$.

(e) Quel est le rang de la matrice A ? Combien vaut son déterminant ? Quel est son polynôme caractéristique ? Justifier vos réponses.
Le déterminant de A est égale au produit des valeurs propres $\det A = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$. Le rang de A est égal à ce de A' qui est 3. Le polynôme caractéristique est $\chi_f(T) = -T(T-1)^2$. On connait en effet ses racines avec leur multiplicités et le coefficient du terme de plus haut degré qui est -1.

Exercice 3.

(a) Calculer les déterminants : $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

(b) Soit Δ_n le déterminant de la matrice $n \times n$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.
En déduire que $\Delta_n = n + 1$ pour tout $n > 1$.

(a)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 - 2 = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 3 = 5.$$

(b) En développent par rapport à la première ligne

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

et le deuxième déterminant par rapport à la première colonne

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Par récurrence sur n

$$\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n = 2(n+2) - (n+1) = n + 3.$$

Exercice 4.

(a) Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, on considère les vecteurs $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, -1, 1)$. On note $F = Vect(u, v, w) \subset \mathbb{R}^3$. Proposer une base orthogonale de F. Calculer le projeté orthogonal de $b = (2, 1, 3)$ sur F.

(b) Montrer que le système

$$\begin{cases} x - y = & 2 \\ y - z = & 1 \\ z - x = & 3 \end{cases} \tag{1}$$

n'a pas de solution. Soit $A \in M(3, \mathbb{R})$ la matrice du système (1). Résoudre l'équation matricielle d'inconnue $Y \in M(3, 1, \mathbb{R})$

$$^t AAY = {}^t AB, \qquad \text{où } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(c) Trouver l'ensemble des réels x, y, z qui minimisent l'expression :

$$(x - y - 2)^2 + (y - z - 1)^2 + (z - x - 3)^2.$$

(a) *On cherche d'abord une base de F. On trouve que $\dim F = 2$ et que, par exemple, (u, v) est une base de F.*
Méthode 1 : Par Gram-Schmidt on construit une base orthonormée (e_1, e_2) de F :

$$e_1 = u = (1, 0, -1), e_2 = v - \frac{\langle u|v\rangle}{\|u\|^2} u = (-1/2, 1, -1/2).$$

Alors

$$pr_F(b) = \frac{\langle b|e_1\rangle}{\|e_1\|^2} e_1 + \frac{\langle b|e_2\rangle}{\|e_2\|^2} e_2 = \frac{-1}{2} e_1 - e_2 = (0, -1, 1).$$

Méthode 2 : $F^\perp = \mathbb{R}(1, 1, 1)$. On note $e_3 = (1, 1, 1)$. Alors

$$pr_F(b) = b - pr_{F^\perp} b = b - \frac{\langle b|e_3\rangle}{\|e_3\|^2} e_3 = b - 1e_3 = (0, -1, 1).$$

(b) *Pour montrer que (1) n' a pas de solution on échelonne la matrice augmentée de (1)*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

La dernière ligne donne l'équation $0 = 6$ qui n'a pas de solutions.
Écrivons (2) :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont $x = y = z - 1$, $z \in \mathbb{R}$.

(c) *Méthode 1 : Par un théorème du cours il s'agit des solutions de (2), c.-à.-d. $x = y = z - 1$, $z \in \mathbb{R}$.*
Méthode 2 : On va résoudre le système $AY = {}^t(pr_F(b))$ c.-à.-d.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $x = y = z - 1$, $z \in \mathbb{R}$.