Exercice 1.
On donne la matrice suivante

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1. Quel est le rang de A ?
1.2. Même question avec les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 17 \\ 4 & -5 & 15 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -5 \\ 9 & 5 & 17 & 15 \end{pmatrix}$$

1.3. Comment résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + 7y = 0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x - y + 9z = 0 \\ x + \quad +5z = 0 \\ 3x + 2y + 17z = 0 \\ 4x - 5y + 15z = 0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ -x + \quad +2z - 5t = 0 \\ 9x + 5y + 17z + 15t = 0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^4?$$

Exercice 2.
Ecrire sous forme matricielle le probléme suivant :
Trouver deux quadruplets différents de 4 entiers a, b, c et d tels que : La moyenne de a et b est 35*, la moyenne de b et c est* −22*, la moyenne de c et d est* −39*, et la moyenne de a et d est* 18.
Résoudre le problème.

Exercice 3.
3.1. Décider si les familles suivantes sont libres :

1. $((1,6,8,3),(1,7,4,0))$ dans $\mathbb{R}^4$,
2. $((4,-2,-12,-16,6),(-2,1,6,8,3))$ dans $\mathbb{R}^5$,
3. $((0,0,0,0,0),(1,0,7,3,0))$ dans $\mathbb{R}^5$,
4. $((21,15,-3),(14,10,-2))$ dans $\mathbb{R}^3$.

3.2. Décider si les familles suivantes sont libres :

1. $((1,6,8,3))$ dans $\mathbb{R}^4$,
2. $((1,6,8,3),(1,7,4,0))$ dans $\mathbb{R}^4$,
3. $((1,6,8,3),(1,7,4,0),(0,1,-4,-3))$ dans $\mathbb{R}^4$,
4. $((4,-2,-12,-16,6),(-2,1,6,8,-3))$ dans $\mathbb{R}^5$,
5. $((0,0,0,0,0),(1,0,7,3,0),(-2,1,6,8,-3))$ dans $\mathbb{R}^5$,
6. $((0,0,0,0,0),(1,0,7,4,0))$ dans $\mathbb{R}^5$,
7. $((21,15,3),(14,10,-2),(1,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.

Extraire de chacune d'elles une famille libre maximale.

Exercice 4.
On considère les deux vecteurs suivants de R^3 : $U_1 := (2,3,-1)$ et $U_2 := (1,-1,2)$.
4.1. Peut-on déterminer des réels x, y, pour que le vecteur $V = (-2,x,y)$ appartienne à sous-espace vectoriel F engendré par U_1 et U_2 ?
4.2. Vérifier que $W = (5,5,0)$ appartient à F. Completer W en une base de F.

Exercice 5.
On donne dans $\mathbb{R}^3$ le sous-ensemble suivant :

$$P := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + 3y - z = 0\}.$$

Dire pourquoi P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la dimension de P ?
Parmi les énoncés suivants, lesquels sont vrais ? Comment décider ?

1. $((1,1,4))$ est une base de P.
2. $((1,1,4),(-2,-2,-8))$ est une base de P.
3. $((1,1,4),(-2,-2,-8),(1,0,0))$ engendre P .
4. $((1,1,4),(-2,-2,-8),(1,0,1))$ engendre P .