Exercice 1.
Pour chacune des applications linéaires T suivantes, répondre aux questions suivantes :

1. Vérifier que l'application T est linéaire. Ecrire sa matrice dans les bases canoniques.
2. Déterminer le noyau et l'image de T. Donner la dimension et une base de chacun des sous-espaces.
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y) = (3x + y, x - y)$.
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y)$.
   (c) $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T_\alpha(x, y) = (x + \alpha y, 2 + 4y)$, (selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$).
   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (z, y, 0)$.
   (e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y) = (x - y, x + y, x + 2y)$.

Exercice 2.
On considère l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ donnée par : $T(1, 0, 0, 0) = (-1, -1, -1, 0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, -1, -1, 0)$, $T(0, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 1, 0, -1)$, $T(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$. Déterminer la matrice, le rang, l'image et le noyau de T .

Exercice 3.
On note $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Existe-t-il une application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$T(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, T(\vec{e}_2) = \vec{e}_3 - \vec{e}_1, T(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2?$$

Même question si on demande

$$T(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_3, T(\vec{e}_3 - \vec{e}_1) = \vec{e}_2, T(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_1.$$

Exercice 4.
On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2. \end{pmatrix}$$

Peut-on former les produits ABC, CBA, BAC, BCA ? Si oui, les calculer de deux manières pour vérifier, sur ce cas particulier, l'associativité du produit de matrices.

Exercice 5.
Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2. Dans cet espace on considère le vecteur (au sens élément de l'espace vectoriel, qui est donc ici une matrice)

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On va considérer l'endomorphisme S de E (application linéaire de E dans E) donnée par la multiplication (à gauche) par P. C'est à dire $T(A) = PA$. (Vérifier que c'est bien une application linéaire). On rappelle que la base canonique $\mathcal{B}$ de E est l'ensemble des matrices :

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Quelles sont les images des matrices M_i par l'application T ? En déduire alors la matrice de l'application T dans la base $\mathcal{B}$ (qui est donc une matrice 4×4 ; pourquoi ?).
Faire la mm̂e chose pour l'endomorphisme T' de E qui est la multiplication à droite par P.

Exercice 6.

1. On pose

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les puissances de N. La matrice N, est elle inversible ?

   (a) Soit $T : E \to E$ une application linéaire telle que $T^2 = 0$.

   (b) Montrer que $Im(T) \subset Ker(T)$.

   (c) Montrer que $Id_E + T$ est un automorphisme linéaire de E et calculer (en termes de T) son inverse.

Exercice 7.

1. Déterminer la matrice A_θ de rotation directe $f_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ d'angle θ autour de l'axe définie par $\vec{e}_3$. Même question pour la rotation directe $g_{\theta'} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ d'angle θ' autour de l'axe définie par $\vec{e}_1$. Désignons la matrice de $g_{\theta'}$ par $A'_{\theta'}$. Est-ce que ceux deux rotations commutent : $A_\theta A'_{\theta'} = A'_{\theta'} A_\theta$?
2. Vérifier que la matrice

$$B_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix},$$

   et la matrice de symétrie orthogonale σ dans le plan $\mathbb{R}^2$ par rapport à l'axe définie par le vecteur $(cos\theta, \sin\theta)$.