UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2015/2016**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Feuille 1
Page web : `http://math.unice.fr/~parus/A2.html`

Exercice 1.
On considère la matrice suivante

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1. Quel est le rang de A ?
1.2. Même question avec les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 11 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -5 \\ 5 & 3 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3. Comment résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x + y + 3z + 2t = 0 \\ -x + \quad + 2z - 5t = 0 \\ 5x + 3y + 11z + t = 0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ x + \quad + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 11z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^3 \text{ ?}$$

Exercice 2.
Ecrire sous forme matricielle le problème suivant :
Trouver deux quadruplets différents d'entiers $(a,\ b,\ c,\ d)$ *tels que :*
La moyenne de a *et* b *est* 3*, la moyenne de* b *et* c *est* 4*, la moyenne de* c *et* d *est* 6 *et la moyenne de* a *et* d *est* 5*.*
Résoudre le problème.
Même question pour les moyennes : 3,4,5,6.

Exercice 3.
Est-ce que les familles suivantes sont libres :

1. $((1,0,1,0))$ dans $\mathbb{R}^4$,
2. $((1,0,1,0),(1,0,2,1))$ dans $\mathbb{R}^4$,
3. $((1,0,1,0),(1,0,2,1),(0,0,1,1))$ dans $\mathbb{R}^4$,
4. $((1,0,1,0),(1,0,2,1),(0,0,1,2))$ dans $\mathbb{R}^4$?

Extraire de chacune d'elles une famille libre maximale.

Exercice 4.
4.1. Dans $\mathbb{R}^3$, on se donne le sous-ensemble

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 3y - z = 0\}.$$

Trouver une application linéaire dont le noyau est P. Conclure sur la nature de P. Trouver une base de P.
4.2. On se donne maintenant le sous-ensemble

$$L := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 3y - z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}.$$

Trouver une application linéaire dont le noyau est L. Conclure sur la nature de L. Trouver une base de L.

Exercice 5.
Pour chacune des applications linéaires T suivantes :

1. Ecrire sa matrice dans les bases canoniques.
2. Déterminer le noyau et l'image de T. Donner la dimension et une base de chacun de ces sous-espaces.
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y) = (x - 2y, -2x + 4y)$.
   (b) $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T_\alpha(x, y) = (x + \alpha y, -2x + 4y)$, (selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$).
   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (z, x + y, 0)$.
   (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y) = (x - y, x + y, x + 2y)$.

Exercice 6.
On considère les deux vecteurs suivants de R^3 : $U_1 := (2, 3, -1)$ et $U_2 := (1, -1, 2)$.
4.1. Peut-on déterminer des réels x, y, pour que le vecteur $V = (-2, x, y)$ appartienne à sous-espace vectoriel F engendré par U_1 et U_2 ?
4.2. Vérifier que $W = (5, 5, 0)$ appartient à F. Completer W en une base de F.