Exercice 1.
On considère les matrices suivantes
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
1.1. Est-ce que le vecteur $(1, 1, 0)$ est un vecteur propre de B ? Si oui pour quelle valeur propre ? On désigne alors par E l'espace propre associé à cette valeur propre. Déterminer une base de E.
1.2. Même question pour la matrice A.
1.3. On désigne par $E^\perp$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à E. Calculer une base de $E^\perp$ et montrer que $E^\perp$ est également un espace propre de B.
1.4. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de B.

Exercice 2.
On considère la matrice suivante de $M_3(\mathbb{R})$
$$M = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 & 2 \\ -1 & \frac{5}{3} & -2 \\ 2 & -2 & \frac{14}{3} \end{pmatrix}.$$
2.1. Est-ce que le vecteur $\vec{u} = (1, -1, -1)$ est un vecteur propre de M ?
Si oui quelle est la valeur propre correspondante ? Déterminer une base de l'espace propre E associé à cette valeur propre.
2.2. Montrer que $\frac{20}{3}$ est une valeur propre de M et déterminer l'espace propre correspondant.
2.3 Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de la matrice M.
2.4. On désigne par $\vec{v}_0$ le vecteur $(0, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées de $\vec{v}_0$ dans la base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres.
2.5. On considère la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de premier terme $\vec{v}_0$ et définie par $\vec{v}_{n+1} = M\vec{v}_n$ pour $n \geq 0$. Quel est le comportement de la suite $\{\vec{v}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 3.
3.1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Soit λ un réel. Déterminer le rang de $A - \lambda I_2$ en fonction de la valeur de λ. Quelles sont les valeurs propres de A ?
3.2. Mêmes questions en remplaçant A par $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.
4.1. Caractériser les matrices $M \in M_4(\mathbb{R})$ telles que 0 soit une valeur propre de M.

4.2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice suivante

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.
On considère la matrice suivante

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

5.1. Calculer S^2 (c'est-à-dire le produit de matrices SS).
5.2. Peut-on trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ avec $S\vec{v} = \lambda\vec{v}$? Quelles sont les valeurs possibles de λ ?
5.3. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de S.
5.4. Donner le nom de l'application linéaire $\varphi_S \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est S.

Exercice 6.
Calculer les déterminants des matrices suivantes. Préciser si elles sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -8 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.
7.1. Montrer la formule

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

7.2. Evaluer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) \\ \cos(x) & \cos(2x) & \cos(3x) \\ \cos(2x) & \cos(3x) & \cos(4x) \end{vmatrix}$$