Exercice 1.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1. Peut-on former les produits ABC, CAB, CBA, BAC et BCA ?
1.2. Lorsque c'est le cas, calculer le produit de deux manières afin de vérifier l'associativité du produit matriciel.

Exercice 2 : *Problèmes de commutativité du produit matriciel.*

2.1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA.
2.2. On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutent et que A est inversible. Montrer que A^{-1} et B commutent.
2.3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$ et $B^p = 0$ pour un certain entier $p \geq 1$.
On veut montrer que A est inversible si et seulement si $A + B$ l'est.
  a. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $N^p = 0$ pour un certain entier $p \geq 1$ alors $I_n - N$ est inversible d'inverse $I_n + N + \cdots + N^{p-1}$.
  b. On suppose A inversible. Montrer que $(A^{-1}B)^p = 0$ (On pourra utiliser la question 2.2.). En déduire que $I_n + A^{-1}B$ et $A + B$ sont inversibles.
  c. On suppose $A + B$ inversible. Déduire de la question précédente que A est inversible.

Exercice 3.
On considère $U_1 = (1, 1, 1)$ et $U_2 = (1, -1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3.1. Vérifier que la famille (U_1, U_2) est libre.
3.2. Est-ce que les vecteurs suivants appartiennent au sous-espace vectoriel engendré par U_1 et U_2 ?

$$(0, 2, 1) \quad (-1, 5, -1) \quad (1, 2, 3)$$

3.3. Compléter la famille (U_1, U_2) en une base de $\mathbb{R}^3$.
3.4. Donner les coordonnées des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants dans cette base

$$(1, 0, 0) \quad (1, 1, 1) \quad (-1, 5, -1) \quad (1, 2, 3)$$

Exercice 4.

4.1. Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

4.2. On définit les matrices élémentaires par $E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{i,j=1,2}$ où δ_{mn} est le symbole de Kronecker défini par $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a. Écrire les matrices élémentaires E_{kl}.

b. Vérifier que $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4.3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Rappeler la définition d'un endomorphisme d'espace vectoriel.

b. Vérifier que $f : A \mapsto PA$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c. Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{tr}(A^tA) = 0$.

5.1. Calculer les coefficients de la diagonale de A^tA.

5.2. Que peut-on dire de A ?

Exercice 6.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

6.1. Calculer $A^3 - A$.

6.2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 7.

7.1. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a. Déterminer la matrice A_θ de la rotation directe $f_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ d'angle θ autour de l'axe défini par e_3.

b. Déterminer la matrice $A'_{\theta'}$ de la rotation directe $g_{\theta'} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ d'angle θ' autour de l'axe défini par e_1.

c. Est-ce que ces deux rotations commutent ?

7.2. Vérifier que $B_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ est la matrice de la symétrie orthogonale du plan $\mathbb{R}^2$ par rapport à l'axe défini par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$.