Exercice 1.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1. Peut-on former les produits ABC, CAB, CBA, BAC et BCA ?
1.2. Lorsque c'est le cas, calculer le produit de deux manières afin de vérifier l'associativité du produit matriciel.

Exercice 2.
Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. De même avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 3.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que $AB = AC$, a-t-on $B = C$? A peut-elle être inversible ?

Exercice 4.
Soient A et P deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et P inversible. Montrer que :

$$\begin{array}{c} A \text{ est inversible} \\ \Updownarrow \\ PA \text{ est inversible} \end{array}$$

Exercice 5.
Déterminer, en fonction des valeurs des paramètres réels a, b, c, d, e, f, la position relative des droites A et B du plan vectoriel usuel, respectivement définies dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par leurs équations cartésiennes

$$\begin{aligned} A : ax + by &= c \\ B : dx + ey &= f \end{aligned}$$

Exercice 6.
Etant donnés les deux sous-espaces vectoriels U et W de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U &= Vect((1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1)) \\ W &= Vect((1,2,2,-2),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3)). \end{aligned}$$

Donner la dimension et une base pour les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

1. U
2. W
3. $U \cap W$

Exercice 7.
Montrer que $\mathcal{B} = (1, 1+x, 1-x^2)$ est une base du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ de $\mathbb{R}[x]$, constitué des polynômes de $\mathbb{R}[x]$ de degré au plus 2. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{v} = 1 - 2x + 5x^2$ dans cette base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$?

Exercice 8.
On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathcal{M}(2,\mathbb{R}) \\ & (x,y,z,t) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+z & x+t \\ y-t & y+z \end{pmatrix}. \end{array}$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une application linéaire.
2. Donner la matrice de $\mathcal{A}$ relative aux bases canoniques

$$\mathcal{E} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$$

de $\mathbb{R}^4$ et

$$\mathcal{E}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

de $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$.