On rappelle que les valeurs propres et espaces propres d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ sont ceux de l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

1.1. Soient a, b, c trois réels distincts donnés.
Quels sont les valeurs propres et les espaces propres de la matrice diagonale $A = diag(a, b, c) \in M_3(\mathbb{R})$.

1.2. On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de N.
Peut-on trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de N ?

1.3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on suppose l'existence d'un vecteur propre $\vec{v}$ de A.
Prouver que pour chaque $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AB - BA = 0$, si le vecteur $B\vec{v}$, image de $\vec{v}$ par l'endomorphisme de matrice B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est non nul, alors $B\vec{v}$ est un vecteur propre de A.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

2.1 Le vecteur $(1, 1, 1)$ est-il un vecteur propre de A ? Si oui, pour quelle valeur propre ?
On note E l'espace propre associé à cette valeur propre. Déterminer une base de E.

2.2 On désigne par $E^\perp$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à E.
Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $E^\perp$ et montrer que $E^\perp$ est préservé par A : si $\vec{v} \in E^\perp$, alors $A\vec{v} \in E^\perp$.

2.3 On considère l'endomorphisme de $E^\perp$ qui transforme $\vec{v} \in E^\perp$ en $A\vec{v}$ (l'image de $\vec{v}$ par l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) .
Quelle est la matrice de cet endomorphisme dans la base $\mathcal{B}$ de $E^\perp$?

2.4 Construire une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

2.5 Soit $\vec{v}_0 = (1, -1, 3)$. Calculer $A^n\vec{v}_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$.

3.1 Est-ce que le vecteur $\vec{u} = (0, 1, 0)$ est un vecteur propre de A ? Si oui, pour quelle valeur propre ?

3.2 Montrer que 2 est une valeur propre de A et déterminer l'espace propre correspondant.

3.3 Est-ce que 1 est une valeur propre de A ?
Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

3.4 Soit $P \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
Calculer la matrice P^{-1}, inverse de P.
3.5 Calculer $P^{-1}AP$.
Utiliser ce résultat pour déterminer l'ensemble des matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 4

4.1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et λ un réel.

Pour chaque choix de (a, b, c), déterminer le rang de $A - \lambda I_2$ en fonction de la valeur de λ.
En déduire les valeurs propres de A.
Pour quels choix de (a, b, c) existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ composée de vecteurs propres de A ?

4.2 Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer le rang de $B - \lambda I_3$ en fonction de la valeur de λ.
B est elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

Exercice 5

5.1 Caractériser les matrices $M \in M_4(\mathbb{R})$ qui admettent 0 comme valeur propre.

5.2. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.3 Déterminer les valeurs propres et les espaces propres des matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont $\neq 0$.

Exercice 6

On considère la matrice $S = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$.

6.1 Calculer S^2 .

6.2 On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $S\vec{v} = \lambda\vec{v}$ pour une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$.
Que peut-on déduire pour λ ?

6.3 Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de S.

6.4 Préciser la nature de l'endomorphisme σ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est S.

Exercice 7

On considère la matrice $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

7.1 Calculer R^3.

7.2. On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $R\vec{v} = \lambda\vec{v}$ pour une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$.
Que peut-on déduire pour λ ?

7.3. Prouver que R n'a pas de valeur propre réelle.

7.4. Préciser la nature de l'endomorphisme ρ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est R.