UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2013/2014**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Feuille 3

Exercice 1.

Pour chacune des matrices suivantes :
1.1 Calculer son polynôme caractéristique sous une forme factorisée.
1.2 En déduire sa ou ses valeurs propres réelles.
1.3 Calculer la dimension des espaces propres associés à ses valeurs propres réelles.
1.4 En déduire si elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\ C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5 Parmi les matrices ci-dessus, lesquelles ne sont pas diagonalisables sur $\mathbb{C}$?

Exercice 2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

2.1 Calculer le polynôme caractéristique de u.

2.2 Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.

2.3 En déduire que u est diagonalisable et le diagonaliser dans une base explicite.

Exercice 3.

Ici, le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Soit E un plan vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

On considère l'endomorphisme ϕ de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

3.1 Calculez et factorisez le polynôme caractéristique de ϕ.

3.2 ϕ est-il diagonalisable ? Si oui construire une base de E qui le diagonalise .

3.3 Mêmes questions avec l'endomorphisme ψ de E de matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4.

On considère l'application linéaire ψ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

4.1 Soit la partie de $\mathbb{R}^2$ suivante : $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.
Représenter graphiquement K et $\psi(K)$.

4.2 Montrer que ψ est diagonalisable et le diagonaliser dans une base (v, w) de $\mathbb{R}^2$.

4.3 Soit la partie de $\mathbb{R}^2$ suivante : $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = \alpha v + \beta w \text{ avec } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant \beta \leqslant 1\}$.
Représenter graphiquement L et $\psi(L)$.

Exercice 5.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.1 Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, et les espaces propres de u.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

5.2 Calculer $(A - I)^2$.
En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $A^n = nA + (1 - n)I$.

5.3 Soient $P(X) = (X - 1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q.
En remarquant que P(A)=0 et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver l'expression de A^n.

Exercice 6. Récréation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{H}$ un endomorphisme de E.

On veut montrer que si pour un entier donné $k < n$, tous les sous-espaces de dimension k de E sont stables par $\mathcal{H}$ alors $\mathcal{H}$ est une homothétie vectorielle (i.e $\mathcal{H} = \lambda Id_E$, $\lambda \in \mathbb{K}$).

Commencer par étudier le cas où $k = 1$.

Pour $0 < k < n$ vous pourrez commencer par montrer que si F est un sev de E de dimension $k-1$, il est l'intersection de deux sev de dimension k.

Exercice 7.

Soit E un plan vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$ et (e_1, e_2) une base donnée de E.

On considère l'endomorphisme Φ de E de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2).

7.1 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Etudier le rang de l'endomorphisme $\Phi - \lambda Id_E$ en fonction de λ, a, et b et en déduire l'ensemble des valeurs propres de Φ selon les valeurs de a et b.

7.2 Pour quelles valeurs du couple (a, b) l'endomorphisme Φ est-il non diagonalisable ?

7.3 Quand il l'est, diagonaliser l'endomorphisme Φ dans une base de E explicite.

Exercice 8.

Soient a, b, c trois réels vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique $F = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

8.1 Calculer le déterminant de ϕ et son rang.

8.2 Déterminer l'image et le noyau de ϕ, comparez-les.

8.3 On pose $\psi = Id_{\mathbb{R}^3} - \phi$.
Calculer les matrices de ϕ^2, $\psi \circ \phi$, $\phi \circ \psi$ et ψ^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

8.4 Déterminer l'image et le noyau de ψ, comparez-les avec ceux de ϕ.

8.5 Déterminer les valeurs propres et espaces propres de ϕ et ψ.

8.6 Caractériser géométriquement les endomorphismes ϕ et ψ.

Exercice 9.

Soient A et B deux endomorphismes d'un ev E de dimension finie n.

On suppose que A et B commutent et que B admet n valeurs propres distinctes.

9.1 Montrer que dans ces conditions tout vecteur propre de B est un vecteur propre de A.

9.2 En déduire que A et B sont simultanément diagonalisables (ie : dans une même base de E).

9.3 On note $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ celles de B.
Calculer par récurence sur n une expression factorisée du déterminant de Vandermonde :

$$V(\mu_1, \cdots, \mu_n) = \begin{vmatrix} 1 & \mu_1 & \cdots & \mu_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \mu_n & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

9.3 Déduire de ce qui précède que l'endomorphisme A s'exprime alors et de manière unique comme un polynôme en B de degré $n - 1$.

On mettra à profit la diagonalisation simultanée de A et B et une propriété simple que le déterminant de Vandermonde ci-dessus vérifie sous les hypothèses faites sur B.