**Exercice 1 :** *sommes directes.*
On considère un espace vectoriel $E$ sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de $E$ de dimensions finies et de bases respectives $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$.
On appelle somme des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ le sous-espace vectoriel de $E$ suivant

$$F_1 + \cdots + F_r = \mathrm{Vect}(F_1 \cup \cdots \cup F_r) = \{x_1 + \cdots + x_r,\, x_i \in F_i\}$$

1.1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 (i) La famille obtenue en concaténant les familles $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ est une famille libre.
 (ii) Pour toute famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_r) \in F_1 \times \cdots \times F_r$, on a :

$$x_1 + \cdots + x_r = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_r = 0$$

 (iii) $\dim(F_1 + \cdots + F_r) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_r$
 *Lorsqu'une famille de sous-espaces vectoriels vérifie les assertions précédentes, on dit qu'elle est en* somme directe *et on note* $F_1 + \cdots F_r = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.

1.2. Lorsque $r = 2$, montrer que les assertions précédentes sont équivalentes à
 (iv) $F_1 \cap F_2 = \{0\}$

**Exercice 2 :** *matrices de Hilbert.*
Soient la matrice $M = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2.1. Vérifier que $M$ est une matrice symétrique réelle.
2.2. Exprimer ${}^tXMX$ à l'aide d'une intégrale.
 *Indications :* $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2}\mathrm{d}t$ *et* $t^{i+j-2} = t^{i-1}t^{j-1}$.
2.3. En déduire que $M$ est définie positive.

**Exercice 3.**
On considère dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, un sous-espace vectoriel $F$ et un vecteur $x$. Calculer la projection orthogonale de $x$ sur $F$ pour les données suivantes :
3.1. $n = 2$, $x = (1, 0)$, $F = \mathrm{Vect}((1, 2))$.
3.2. $n = 4$, $x = (1, 0, -1, 7)$, $F = \mathrm{Vect}((1, 2, -2, -1), (3, 0, 1, -2))$.
3.3. $n = 4$, $x = (1, 0, -1, 7)$, $F = \{3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0\}$.
3.4. $n = 4$, $x = (1, 0, -1, 7)$, $F = \{3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0,\, 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

**Exercice 4.**
On considère $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel ainsi qu'une famille de vecteurs
$\mathcal{F} = ((1, 2, -2, 0), (0, -1, 2, 1), (-1, 3, 1, 2))$.
4.1. Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
4.2. Orthonormaliser la famille $\mathcal{F}$.
4.3. Peut-on en déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ pour le produit scalaire usuel ?

**Exercice 5.**
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré au plus 3 à coefficients réels.
5.1. Vérifier que $\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 | b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

5.2. On considère $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = 0\}$.
  a. Vérifier que $H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en donner une base.
  b. Déterminer une base orthonormale de $H$.
  c. En déduire la projection orthogonale du polynôme $X$ sur $H$ puis la distance de $X$ à $H$.

**Exercice 6 :** *quelques inégalités.*
*Indication : pour les deux questions suivantes, on pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis (peut-être après quelques manipulations).*

6.1. Soit $E$ un espace vectoriel euclidien pour un produit scalaire $\langle \cdot|\cdot \rangle$ de norme associée $\| \cdot \|$.
  Montrer que pour $x_1, \dots, x_n \in E$, $n \geq 1$, on a $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.

6.2. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$.
  Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$ et étudier le cas d'égalité.

**Exercice 7.**

7.1. Vérifier que $\langle A|B \rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7.2. En déduire que pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $(\mathrm{tr}(AB))^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\,\mathrm{tr}(B^2)$.

**Exercice 8 :** *Projecteurs orthogonaux.*
Soient $E$ un espace vectoriel euclidien et $p$ un projecteur de $E$.

8.1. Rappeler les définitions de projecteur et de projecteur orthogonal.

8.2. Montrer que $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
  *Indications : pour le premier sens, on pourra appliquer le théorème de Pythagore et pour la réciproque on pourra étudier les variations de l'application $f(t) = \|x + ty\|^2$ pour des vecteurs $x$ et $y$ bien choisis.*

**Exercice 9.**

9.1. Vérifier que $\langle P|Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

9.2. a. Rappeler les définitions de symétrie vectorielle et de symétrie orthogonale.
  b. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(-X) \end{array}$ est une symétrie orthogonale.

9.3. Orthonormaliser la famille libre $(1, X, X^2)$.

**Exercice 10 :** *Matrice et déterminant de Gram.*
Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot|\cdot \rangle$. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on définit la matrice de Gram de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ par $G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i|x_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n}$ et le déterminant de Gram de cette même famille par $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n))$.

10.1. Montrer que $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{rg}(G(x_1, \dots, x_n))$.
  *Indication : on pourra s'intéresser aux colonnes de la matrice de Gram.*

10.2. Montrer que si $x_1 \perp x_i$ pour tout $i = 2, \dots, n$ alors $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \|x_1\|^2 \gamma(x_2, \dots, x_n)$.

10.3. a. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$.
  b. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$.
  *Remarque : le déterminant de Gram est donc toujours positif.*

10.4. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie admettant une base $(e_1, \dots, e_n)$. Notons, pour tout $x \in E$, $p_F(x)$ le projeté orthogonal de $x$ sur $F$.
  Montrer que $\gamma(x, e_1, \dots, e_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \cdot \gamma(e_1, \dots, e_n)$ ie $d(x, F) = \sqrt{\dfrac{\gamma(x, e_1, \dots, e_n)}{\gamma(e_1, \dots, e_n)}}$.