Université Nice Sophia Antipolis
UFR Sciences
Département de Mathématiques

2016/2017
Algèbre 2
Feuille 4

Exercice 1.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Déterminer parmi les applications $(u, v) \to \langle u|v\rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, celles qui définissent un produit scalaire sur E.

1.1. $E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P|Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$;
1.2. $E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$;
1.3. $E = \mathbb{R}$, $\langle x|x'\rangle = x^2 + (x')^2$;
1.4. $E = \mathbb{R}^2$, $\langle (x.y)|(x', y')\rangle = xx' - 6(xy' + x'y) + yy'$;

Exercice 2.
On travaille dans l'espace $Cont([0, 2\pi])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{F}_n$ des fonctions $f_k = \cos kx$, $0 \leq k \leq n$ est une famille orthogonale. (Indice : utiliser la formule pour $\cos a \cos b$)

b) En déduire que $\mathcal{F}_n$ est une famille libre de $Cont([0, 2\pi])$.

c) Que peut-on en déduire sur la dimension de $Cont([0, 2\pi])$?

Remarque : Le même raisonnement montre que la famille des fonctions $f_k = \cos kx$, $0 \leq k \leq n$, et $g_k = \sin kx$, $0 < k \leq n$, est une famille orthogonale.

Exercice 3.
Soit $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel.

3.1. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\|\vec{u} + c\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2c\,\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle + c^2\|\vec{v}\|^2.$$

3.2. Déterminer, en justifiant, l'aire du parallélogramme $ABCD$ tel que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AD}$ en fonction des normes $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|$ et du produit scalaire $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle$.

Exercice 4.
Soit E un espace euclidien de dimension finie et soit F_1 et F_2 deux sous-espaces de E. Montrer que $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$ et que $F_1^\perp + F_2^\perp = (F_1 \cap F_2)^\perp$.

Exercice 5.
Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer les inégalités suivantes :

a) $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Pour quels a, b, c a-t-on l'égalité ?

b) $\dfrac{a_1^2}{b_1} + \dfrac{a_2^2}{b_2} + \cdot + \dfrac{a_n^2}{b_n} \geq \dfrac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$, pour $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$, $b_1, ..., b_n > 0$.
Étudier le cas d'égalité.

Exercice 6.
Soit $E = \mathbb{R}^2$ et pour $x = (x_1, x_2) \in E$ soit l'application

$$N(x) = (3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2)^{1/2}.$$

6.1. Montrer que $N(x)$ est une norme associée à un produit scalaire que l'on précisera.
6.2. Déterminer une base de E, orthonormale pour ce produit scalaire.
6.3. Soit $F = \{(x_1, x_2) \in E, x_1 - 2x_2 = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 7.
On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien usuel.
Soit $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 = -x_2\}$.
7.1. Déterminer une base orthonormale de F. En déduire pour $x \in E$, $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.
7.2. Déterminer $F^\perp$. Calculer de deux manières différentes pour $x \in E$, $p_{F^\perp}(x)$ la projection orthogonale de x sur $F^\perp$.
7.3. Calculer la distance de $a = (0, 1, 0)$ à F.

Exercice 8.
On considère $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel ainsi que le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\vec{u} = (1, -2, -1, 2), \vec{v} = (3, -1, 1, 3), \vec{w} = (4, -3, 0, 5))$.
8.1. Proposer une base orthonormale $\mathcal{B}$ de F.
8.2. Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{x} = (-4, 1, 0, 3)$ sur F.
8.3. Compléter $\mathcal{B}$ en une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.