UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques feuille 5

Pour un espace euclidien E on désigne par $S(E)$ l'ensemble des opérateurs symétriques de E et par $O(E)$ l'ensemble des opérateurs orthogonaux de E.

Exercice 1. Compléter $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. On travaille dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.
2. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de la matrice A.
3. Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 3. Considérons la matrice à coefficients complexes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A, est-elle symétrique ? est-elle diagonalisable ?

Exercice 4.

1. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible alors $B = {}^tAA$ est symétrique définie positive.
2. Inversement, si $B \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, montrer qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = {}^tAA$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien et soit $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ la norme associée. Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$ on a

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|y\|^2 + \|x\|^2).$$

Exercice 6. Soit n un entier ≥ 2. On considère un vecteur $Y = (y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et le vecteur U de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

1. Trouver $b \in \mathbb{R}$, fonction de Y, tel que la quantité

$$\|Y - bU\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b)^2 \quad \text{soit minimum.}$$

2. Soit $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ non colinéaire à U. Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, fonctions de X et Y, tels que
$$\|Y - (aX + bU)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 \quad \text{soit minimum.}$$
La droite affine d'équation $y = ax + b$ s'appelle *la droite de régression* de Y en X.
3. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère, pour i de 1 à 4, les 4 points (x_i, y_i) de coordonnées respectives $(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 7)$. Trouver la droite de régression de Y en X . Faire un schéma.
4. Peut-on trouver une courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ telle que
$$\sum_{i=1}^{4} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2 \quad \text{soit minimum ?}$$

Exercice 7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
1. ${}^tAA = I_n$.
2. $A^tA = I_n$.
3. Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
4. Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.
1. Montrer que $\det A = \pm 1$.
2. Supposons que $n = 2$ et $\det A = 1$. Montrer que A est la matrice d'une rotation.
3. Supposons que $n = 2$ et $\det A = -1$. Montrer que A est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Exercice 9. On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
1. Montrer que M est une matrice orthogonale.
2. Montrer que 1 est une valeur propre de f et calculer l'espace propre E_1.
3. Montrer que $(E_1)^\perp$ est stable par f.
4. Montrer que f restreinte à $(E_1)^\perp$ est une rotation.

Exercice 10.
1. Montrer que pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, on a : $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6(x+y+z)}$.
2. On se donne $(x_k)_{k=1,\dots,n}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et on pose $G_n := (\prod_{k=1}^n x_k)^{1/n}$. Montrer que : $\sum_{k=1}^n \ln^2 x_k \geq n \ln^2 G_n$.

Indication : appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis.