Université Nice Sophia Antipolis
UFR Sciences
Département de Mathématiques

2015/2016
Algèbre 2
Feuille 5

Exercice 1 : *Systèmes de Vandermonde.*

Calculer le déterminant de la matrice carrée d'ordre n suivante :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1.1. Étant donnée une famille $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ de n points du plan, avec les x_i deux à deux distincts, on cherche les polynômes de degré au plus $n-1$ dont le graphe passe par tous les points de la famille.

a. Décrire le problème sous forme d'un système linéaire faisant intervenir la matrice V.
b. En déduire qu'il existe un unique polynôme solution du problème.
c. Expliciter le polynôme obtenu pour les familles suivantes :

$$((1,4),(-1,8),(2,17)) \qquad \text{et} \qquad ((-2,-9),(-1,0),(0,1),(2,5))$$

Exercice 2.

On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel qui fait de la base canonique une base orthonormée. On considère deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$.

2.1. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\| = \|x-y\|$.

2.2. Montrer que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 3 : *quelques inégalités.*

Indication : pour les questions suivantes, on pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis (peut-être après quelques manipulations).

3.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on a $(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Indice : essayer les vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ *et* $(1, 1, ..., 1)$.

3.2. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$.

Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$ et étudier le cas d'égalité.

3.3. Soient $a, , b, c \in \mathbb{R}_+^*$ et $x, , y, z \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} \leq \sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}$.

3.4. Soient $a, , b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\frac{a^2}{3^3} + \frac{b^2}{4^3} + \frac{c^2}{5^3} \geq \frac{(a+b+c)^2}{6^3}$.

3.5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$.

Exercice 4.
On considère dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, un sous-espace vectoriel F et un vecteur x. Calculer la projection orthogonale de x sur F pour les données suivantes :

4.1. $n = 2$, $x = (1, 0)$, $F = \mathrm{Vect}((1, 3))$.

4.2. $n = 4$, $x = (1, 0, -1, 7)$, $F = \mathrm{Vect}((1, 2, -2, -1), (3, 0, 1, -2))$.

4.3. $n = 4$, $x = (1, 0, -1, 7)$, $F = \{3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0\}$.

4.4. $n = 4$, $x = (1, 0, -1, 7)$, $F = \{3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0,\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

Exercice 5.
On considère l$\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel ainsi qu'une famille de vecteurs
$\mathcal{F} = ((1, 2, -2, 0), (0, -1, 2, 1), (-1, 3, 1, 2))$.

5.1. Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

5.2. Orthonormaliser la famille $\mathcal{F}$.

5.3. Peut-on en déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ pour le produit scalaire usuel ?

Exercice 6.
On considère l'application $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^\infty P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

6.1. Justifier que φ est bien définie.

6.2. Montrer que φ df́einit un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$.

6.3. Calculer $I_n = \int_0^\infty t^n e^{-t}dt$ et en déduire $\varphi(X^p, X^q)$.

6.4. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ en utilisant le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 7.

7.1. Vérifier que $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7.2. En déduire que pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $(\mathrm{tr}(AB))^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\,\mathrm{tr}(B^2)$.

Exercice 8 : *Projecteurs orthogonaux.*
Soient E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur de E.

8.1. Rappeler les définitions de projecteur et de projecteur orthogonal.

8.2. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. *Indications : pour le premier sens, on pourra appliquer le théorème de Pythagore et pour la réciproque on pourra étudier les variations de l'application $f(t) = \|x + ty\|^2$ pour des vecteurs x et y bien choisis.*

Exercice 9.
Soit $C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel de fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

9.1. Vérifier que

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int_0^1 \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur $C([0, 1], \mathbb{R})$.

9.2. Montrer que pour chaque $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ il existe une paire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telle que pour chaque paire $(c, k) \in \mathbb{R}^2$

$$\int_0^1 (f(x) - a - bx)^2\mathrm{d}x \leq \int_0^1 (f(x) - c - kx)^2\mathrm{d}x$$

9.3. Trouver la paire (a, b) pour $f(x) = e^x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$.