Exercice 1.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Est-ce que la matrice $P^{-1}AP$ est aussi symétrique ? Si non, donner des exemples.

Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de matrices symétriques. Trouver la dimension de $S_n(\mathbb{R})$.

Soit $F : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ donner par $F(A) = {}^tA$. Montrer que l'application F se diagonalise.

Exercice 2. Considérons la matrice à coefficients complexes

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle symétrique ? est-elle diagonalisable ?

Exercice 3. On travaille dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.
2. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de la matrice A.
3. Déterminer une matrice orthogonale P (c.-à.-d. telle que $P^{-1} = {}^tP$) et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 4. On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. On désigne par f la projection orthogonale pr_P sur le plan $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$.

1. Quelle est la matrice de f dans la base canonique ?
2. Trouver une b.o.n. $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $g = s_P$ la symétrie orthogonale par rapport au plan P. Quelle est la matrice de g dans la base canonique ? dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 5. Montrer que les espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Exercice 6.
Soit E l'espace des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$
Montrer que pour tout $f \in E$ il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_0^1 (f(t) - a - bt - ct^2)^2 dt \leq \int_0^1 (f(t) - x - yt - zt^2)^2 dt$$

pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit n un entier ≥ 2. On considère un vecteur $Y = (y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et le vecteur U de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

1. Trouver $b \in \mathbb{R}$, fonction de Y, tel que la quantité
$$\|Y - bU\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b)^2 \quad \text{soit minimum.}$$
2. Soit $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ non colinéaire à U. Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, fonctions de X et Y, tels que
$$\|Y - (aX + bU)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 \quad \text{soit minimum.}$$
La droite affine d'équation $y = ax + b$ s'appelle *la droite de régression* de Y en X.
3. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère, pour i de 1 à 5, les 5 points (x_i, y_i) de coordonnées respectives $(1, 4), (2, 3), (3, 7), (4, 6), (5, 10)$. Trouver la droite de régression de Y en X . Faire un schéma.

Exercice 8.

1. Montrer que le système
$$\begin{cases} 2x + y = \ 1 \\ 2x + 2y = 1 \\ x + 2y = \ \ 1 \end{cases} \tag{1}$$
n'a pas de solution.
2. Soit $A \in M(3, 2, \mathbb{R})$ la matrice du système (1). Résoudre l'équation matricielle d'inconnue $Y \in M(2, 1, \mathbb{R})$
$${}^tAAY = {}^tAB, \qquad \text{où } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
3. Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, on considère les vecteurs $u = (2, 2, 1)$, $v = (1, 2, 2)$. On note $E = Vect(u, v) \subset \mathbb{R}^3$.
   (a) Proposer une base orthonormée de E en appliquant à la famille (u, v) l'algorithme de Gram-Schmidt. Calculer la projection orthogonale de b sur E.
   (b) Soit Y la solution de (2). Vérifier que la matrice AY est la colonne de coordonnées de la projection orthogonale de $b = (1, 1, 1)$ sur E, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.