UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2014/2015**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques feuille 6

Exercice 1. Compléter $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. On désigne par f la projection orthogonale $pr_P^\perp$ sur le plan $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$.

1. Quelle est la matrice de f dans la base canonique ?
2. Trouver une b.o.n. $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $g = s_P^\perp$ la symétrie orthogonale par rapport au plan P. Quelle est la matrice de g dans la base canonique ? dans la base $\mathcal{B}$? Peut-on trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g est égale à A ?

Exercice 3. Considérons la matrice à coefficients complexes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A, est-elle symétrique ? est-elle diagonalisable ?

Exercice 4. On travaille dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.
2. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de la matrice A.
3. Déterminer une matrice orthogonale P (c.-à.-d. telle que ${}^tPP = I_n$) et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 5.

1. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible alors $B = {}^tAA$ est symétrique définie positive.
2. Inversement, si $B \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, montrer qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = {}^tAA$.

Exercice 6. Soit n un entier ≥ 2. On considère un vecteur $Y = (y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et le vecteur U de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

1. Trouver $b \in \mathbb{R}$, fonction de Y, tel que la quantité
$$\|Y - bU\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b)^2 \quad \text{soit minimum.}$$
2. Soit $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ non colinéaire à U. Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, fonctions de X et Y, tels que
$$\|Y - (aX + bU)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 \quad \text{soit minimum.}$$
La droite affine d'équation $y = ax + b$ s'appelle *la droite de régression* de Y en X.
3. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère, pour i de 1 à 4, les 4 points (x_i, y_i) de coordonnées respectives $(1,1), (2,4), (3,3), (4,6)$. Trouver la droite de régression de Y en X . Faire un schéma.
4. Peut-on trouver une courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ telle que
$$\sum_{i=1}^{4} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2 \quad \text{soit minimum ?}$$

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, on considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, -1, 1)$, $\vec{v} = (-1, 1, 1, 1)$, $\vec{w} = (1, -1, -1, 1)$ et $\vec{b} = (-1, 1, 0, 1)$. On note $E = Vect(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

1. Proposer une base orthonormée de E en appliquant à la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ l'algorithme de Gram-Schmidt. Calculer la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur E.
2. Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Calculer la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur E. En déduire la matrice P de la projection orthogonale $pr_E^{\perp}$ sur E. Vérifier que $P^2 = P$.
3. On considère le système
$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - z = 1 \\ -x + y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \tag{1}$$
Montrer qu'il n'a pas de solution.
4. Soit A la matrice du système (1). Résoudre le système
$${}^tAAY = {}^tAB.$$
où $B = {}^t\vec{b}$. Soit $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ la solution. Comparer AY et la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur E (le premier point de cet exercice).
5. Calculer la solution en moindres carrés du système (1).