UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2013/2014**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Corrigé de l'Interrogation 1

Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1.
1.1 On considère le système linéaire

$$\begin{cases} x+y \qquad +t=0 \\ x \qquad +z+2t=0 \\ \qquad y-z-t=0 \end{cases}$$

Résoudre ce système dans $\mathbb{R}^4$.
On échelonne le système : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\begin{cases} x+y \qquad +t=0 \\ \quad -y+z+t=0 \\ \qquad y-z-t=0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$:

$$\begin{cases} x \qquad +z+2t=0 \\ \quad -y+z+t=0 \\ \qquad\qquad 0=0 \end{cases}$$

Il y a deux variables libres z, t et deux variables liées x, y. L'ensemble des solutions

$$\{(-z-2t, z+t, z, t); z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$$

est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(-1, 1, 1, 0)$ et $(-2, 1, 0, 1)$.

1.2. Considérons la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Quel est le rang de A ?
C'est la matrice du système 1.1. Alors le rang de A, égale au nombre des lignes non-nulles dans sa forme échelonnée, est égale au nombre de variables liées. Alors $rang(A) = 2$.

1.3. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x+y+t, x+z+2t, y-z-t).$$

Quelle est la matrice de f ?
C'est la matrice A.

1.4. Donner l'énoncé du théorème du rang.
Quelle est la dimension du noyau $\ker f$? Quelle est la dimension de l'image Imf.
Pour l'énoncé précis voir Théorème 1.2 du cours de Michel Merle.
Dans notre cas $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker f + \dim Imf$. Alors $\dim Imf = rang(A) = 2$ et $\dim \ker f = 4 - 2 = 2$.

1.5 Donner une base de Imf et une base de $\ker f$.
Imf est engéndré par les vecteurs colonnes de la matrice A. Il suffit d'en prendre deux qui ne sont pas proportionnelles. Par exemple $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$.
La base de $\ker f$ est calculé dans 1.1. C'est $(-1, 1, 1, 0)$ et $(-2, 1, 0, 1)$.