UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2016/2017**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Interrogation 1

Toute réponse doit être justifiée.

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par la formule :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + t, x + z + 2t, y - z - t).$$

1. Quelle est la matrice de f ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Donner une base du noyau de f.
On considère le système linéaire

$$\begin{cases} x + y \qquad + t = 0 \\ x \qquad + z + 2t = 0 \\ \qquad y - z - t = 0 \end{cases}$$

On échelonne ce système et on obtient :

$$\begin{cases} x \qquad + z + 2t = 0 \\ \quad -y + z + t = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Il y a deux variables libres z, t et deux variables liées x, y. L'ensemble des solutions

$$\{(-z - 2t, z + t, z, t); z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$$

est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$, dont on peut prendre comme base $((-1, 1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1))$.
3. Donner l'énoncé du théorème du rang.
Quelle est la dimension du noyau $\ker f$? Quelle est la dimension de l'image $im\, f$.
Pour l'énoncé précis voir le Théorème 1.2 du cours de Michel Merle.
Dans notre cas : $4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker f + \dim Imf$. Alors $\dim Imf = rang(A) = 2$ et $\dim \ker f = 2$.
4. Donner une base de l'image de f.
$im\, f$ est engendré par les vecteurs colonnes de la matrice A. Il suffit d'en prendre deux qui ne sont pas proportionnelles. Par exemple $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$.

5. Donner un système d'équations décrivant l'image de f comme s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
On cherche les conditions sur (a, b, c) tel que le système

$$\begin{cases} x + y \quad\quad + t = a \\ x \quad\quad + z + 2t = b \\ \quad\quad y - z - t = c \end{cases}$$

admet une solution. On échelonne ce système par les opérations sur les lignes de la matrice élargie

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & -1 & -1 & c \end{array}\right)$$

on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x \quad\quad + z + 2t = 0 \\ \quad -y + z + t = 0 \\ \quad\quad\quad\quad 0 = b - a + c \end{cases}$$

qui admet des solutions si et seulement si $b - a + c = 0$.