UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS — **2016/2017**
Faculté des Sciences — Algèbre 2
Département de Mathématiques — Interrogation 1

Toute réponse doit être justifiée.

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par la formule :

$$g(x, y, z) = (x + y, x + z, y - z, x + 2y - z).$$

1. Quelle est la matrice de g ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Donner une base du noyau de g.
On considère le système linéaire

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

On échelonne ce système et on obtient :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Il y a deux variables liées x, y et une variable libre z. L'ensemble des solutions

$$\{(-z, z, z); z \in \mathbb{R}, \}$$

est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$, dont on peut prendre comme base $((-1, 1, 1))$.
3. Donner l'énoncé du théorème du rang.
Quelle est la dimension du noyau $\ker g$? Quelle est la dimension de l'image $im\, g$.
Pour l'énoncé précis voir le Théorème 1.2 du cours de Michel Merle.
Dans notre cas $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker g + \dim im\, g$. Alors $\dim \ker g = 1$ et $\dim im\, g = rang(A) = 2$.
4. Donner une base de l'image de g.
$im\, g$ est engendré par les vecteurs colonnes de la matrice A. Il suffit d'en prendre deux qui ne sont pas proportionnelles. Par exemple $(1, 1, 0, 1)$ et $(1, 0, 1, 2)$.

5. Donner un système d'équations décrivant l'image de g comme s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

On cherche les conditions sur (a, b, c, d) tel que le système

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ y - z = c \\ x + 2y - z = d \end{cases}$$

admet une solution. On échelonne ce système par les opérations sur les lignes de la matrice élargie

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \\ 1 & 2 & -1 & d \end{array}\right)$$

on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = a \\ y - z = c \\ 0 = c + b - a \\ 0 = d + b - 2a. \end{cases}$$

qui admet des solutions si et seulement si $c + b - a = d + b - 2a = 0$.