UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2013/2014**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Interrogation 2, Éléments de correction

Toute réponse doit être justifiée.

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.1. Montrer que le vecteur $(0, 2, 1)$ est un vecteur propre de A ? Pour quelle valeur propre ?
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Alors $(0, 2, 1)$ est un vecteur propre de A de valeur propre $\lambda = -1$.

1.2. On désigne par E l'espace propre associé à cette valeur propre. Déterminer une base de E.
On échelonne la matrice
$$A - (-1)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et on obtient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y + 2z = 0\}$. On peut prendre comme base $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (-2, 0, 1)$.

1.3. On désigne par $E^\perp$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à E. Calculer une base de $E^\perp$ et montrer que $E^\perp$ est également un espace propre de A.
Bien entendu par la formule $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y + 2z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; < (1, -1, 2), (x, y, z) >= 0\}$, le vecteur $\vec{w} = (1, -1, 2)$ est une base de $E^\perp$. On peut aussi résoudre le système
$$\begin{cases} < (a, b, c), (1, 1, 0) >= 0 \\ < (a, b, c), (-2, 0, 1) >= 0 \end{cases}.$$
Un calcul donne $A\vec{w} = 5\vec{w}$. Alors $\vec{w}$ est un vecteur propre de valeur propre 5.

1.4. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de la matrice A.
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

1.5. On désigne par $\vec{v}_0$ le vecteur $(0,0,1)$. Calculer les coordonnées de $\vec{v}_0$ dans la base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres. Quel est le comportement de la suite $\{A^n\vec{v}_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini ?
Il faut résoudre le système

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = (0,0,1).$$

La solution est $a = b = c = 1/3$. Alors

$$\begin{aligned} A^n\vec{v}_0 &= A^n(1/3\vec{u} + 1/3\vec{v} + 1/3\vec{w}) = 1/3[(-1)^n\vec{u} + (-1)^n\vec{v} + 5^n\vec{w}] \\ &= 1/3(-(-1)^n + 5^n, (-1)^n - 5^n, (-1)^n + 2\times 5^n). \end{aligned}$$

Alors $\lim_{n\to\infty} A^n\vec{v}_0 = (\infty, -\infty, \infty)$, plus précisement $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n}A^n\vec{v}_0 = (1/3, -1/3, 2/3)$.