UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2013/2014
Algèbre 2
Interrogation 3

NOM :

FILIÈRE :

Toute réponse doit être justifiée.

On considère $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel ainsi que les vecteurs suivants : $x = (2, 2, 0, -1)$, $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, 2)$ et les sous-espaces vectoriel $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, $F_1 = \mathrm{Vect}(v_1)$, $F_2 = \mathrm{Vect}(v_2)$.

1.1. Calculer les produits scalaires

- $\langle x|v_1\rangle = 5$
- $\langle x|v_2\rangle = 0$
- $\langle v_1|v_1\rangle = 6$
- $\langle v_2|v_1\rangle = 4$
- $\langle v_2|v_2\rangle = 6$

1.2. Calculer la projection orthogonale de x sur $F_1 = \mathrm{Vect}(v_1)$

- $pr^{\perp}_{F_1}(x) = \frac{\langle x|v_1\rangle}{\langle v_1|v_1\rangle} v_1 = \frac{5}{6} v_1 = (\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, 0, \frac{5}{6})$

1.3. Calculer la projection orthogonale de x sur $F_2 = \mathrm{Vect}(v_2)$

- $pr^{\perp}_{F_2}(x) = \frac{\langle x|v_2\rangle}{\langle v_2|v_2\rangle} v_2 = 0$

1.4. Calculer la projection orthogonale de x sur $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$

- $pr^{\perp}_{F}(x) = \frac{3}{2} v_1 - v_2 = (\frac{3}{2}, 2, -1, -\frac{1}{2})$

Première méthode : $pr^{\perp}_{F_2}(x) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, où λ_1 et λ_2 sont les solutions du système :

$$\begin{cases} 0 = \langle v_1|x - \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\rangle = 5 - 6\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ 0 = \langle v_2|x - \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\rangle = -4\lambda_1 - 6\lambda_2 \end{cases}$$

La solution est $\lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = -1$.

Deuxième méthode : on calcule d'abord une base orthogonale de F. $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2 - \lambda v_1$, où λ est la solution de :

$$0 = \langle w_1|w_1 - \lambda v_2\rangle = 6 - 4\lambda.$$

La solution est $\lambda = \frac{3}{2}$ et $w_2 = v_2 - \frac{2}{3}v_1 = (-\frac{3}{2}, -2, 1, \frac{1}{2})$. Alors

$$pr_F^{\perp}(x) = \frac{\langle x|w_1\rangle}{\langle w_1|w_1\rangle}w_1 + \frac{\langle x|w_2\rangle}{\langle w_2|w_2\rangle}w_2 = (\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, 0, \frac{5}{6}) + (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -1, -\frac{4}{3}) = (\frac{3}{2}, 2, -1, -\frac{1}{2})$$

1.5. Calculer une base orthonormée $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ de $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{6}}, \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(-2, -1, 3, 4)}{\sqrt{30}}.$$