UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2013/2014**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Interrogation 4. Corrigé

1.1. Rappeler les définitions

- d'un opérateur symétrique.
  Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme f de E est dit symétrique (ou operateur symétrique) si, pour tous u, v de E, on a : $\langle f(u)|v\rangle = \langle u|f(v)\rangle$.
- d'un projecteur
  Soit E un espace vectoriel. On appelle projecteur (ou projection) de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.
- d'un projecteur orthogonal
  Soit E un espace euclidien. On appelle projecteur orthogonal (ou projection orthogonale) de E un projecteur p de E tel que $\ker p = (Imp)^{\perp}$.
- d'une symétrie orthogonale
  Soit E un espace euclidien. On appelle symétrie orthogonale de E tout endomorphisme s de E tel que $s \circ s = id_E$ et $\ker(s - id) = (\ker(s + id))^{\perp}$.
- d'une matrice orthogonale
  Une matrice carré $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifient ${}^tAA = I_n$, est appelée matrice orthogonale

1.2. Donner l'énoncé du théorème sur la diagonalisation des endomorphismes symétriques.
Soient f un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E. Alors f est diagonalisable dans une base ortonormée.
1.3. Donner un exemple :

- d'une matrice symétrique réelle qui n'est pas orthogonale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- d'une matrice orthogonale qui n'est pas symétrique.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$