UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2013/2014
Algèbre 2
Partiel, Durée 1h25

Eléments de corrections.

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1 Quel est le rang de B ? Quel est le déterminant de B ?
On échelonne la matrice : $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $rang(B) = 2$ et aussi $\det(B) = 0$ puisque le rang de B n'est pas maximal.
1.2 Donner une base de Imf et une base de $\ker f$.
Imf est engéndré par les vecteurs colonnes de la matrice A. Il suffit d'en prendre deux qui ne sont pas proportionnelles. Par exemple $(3, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 1, 1)$.
Le $\ker f$ est l' ensemble des vecteurs (x, y, z, t) qui sastifont

$$\begin{cases} 3x + 3t = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

On peut prendre x, y comme variables liées et $z.t$ comme variables libres. Alors l'ensemble des solutions du système $\{(-t, -z - t, z, t); z, t \in \mathbb{R}\}$ est engendré par $((0, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)$.
1.3. Déterminer les valeurs propres de f et les espaces propres associées.
Par 1.1, 0 est une valeur propre et $E_0 = \ker f$. Le calcul du polynôme caractéristique (en développent par rapport à la prémière colonne) donne $\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \lambda^2(\lambda - 3)^2$. La matrice $B - 3I_4$ est de rang 3 du noyau E_3 engendré par $(1, 0, 0, 0)$.
1.4. La matrice B est-elle diagonalisable ?
$\dim E_0 + \dim E_3 = 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Alors B n' est pas diagonalisable par un résultat du cours (condition nécessaire et suffisante de la diagonalisibilité).

Exercice 2.
On donne la matrice suivante dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.1 Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice A. Calculer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. E_1 est angendré par le vecteur $V_1 = (1, 1)$ et E_2 par $V_2 = (1, 2)$. $\mathcal{B} = \{V_1, V_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2.2. On considère ici le vecteur $U_0 := (1, 0)$.
a) Exprimer U_0 dans la base $\mathcal{B}$.
b) Soit $U_n = A^n U_0$. Calculer U_n en fonction de n.
c) Pour $n \geq 0$, on note a_n la première coordonnée de U_n dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Étudier, quand n tend vers l'infini, le comportement de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.
$U_0 = 2V_1 - V_2$,
$U_n = 2V_1 - 2^n V_2 = (2 - 2^n, 2 - 2^{n+1})$,
$a_n = 2 - 2^n \to -\infty$.
2.3. En déduire, suivant les valeurs de u_0, u_1, le comportement de la suite de réels de premiers termes u_0, u_1 et définie, pour $n \geq 0$, par

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Notons $U_0 = (u_0, u_1)$ et $U_n = (u_n, u_{n+1})$. Alors $U_{n+1} = AU_n$:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix},$$

c-à-d $U_n = A^n U_0$. Si $U_0 = \alpha V_1 + \beta V_2$ alors $U_n = \alpha V_1 + 2^n \beta V_2 = (\alpha + 2^n\beta, \alpha + 2^{n+1}\beta)$. Etant donnés u_0 et u_1 on calcule de $u_0 = \alpha + \beta$, $u_1 = \alpha + 2\beta$ que $\alpha = 2u_0 - u_1$ et $\beta = u_1 - u_0$. Alors

$$u_n = \alpha + 2^n\beta = 2u_0 - u_1 + 2^n(u_1 - u_0).$$

Alors $\lim_{n\to\infty} u_n$ est égale à $+\infty$ si $u_1 > u_0$, à $-\infty$ si $u_1 < u_0$. Cette suite est constante si $u_1 = u_0$.

Exercice 3.
1.1 Quand dit-on qu'une matrice est diagonalisable ?
Voir http ://math.unice.fr/%7Emerle/Algebre2/1Cours_Alg2.pdf, Définition 5.14.
1.2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux réels a et b pour que la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - ab$. Si $ab > 0$ alors il est scindé de racines simples. Dans ce cas M est diagonalisable. Si $ab < 0$ alors M n' a pas de valeurs propres réelles. Dans ce cas M n' est pas diagonalisable. Si $a = b = 0$ alors M est diagonale.
Dans le cas $a = 0$ et $b \neq 0$ (ou $a \neq 0$ et $b = 0$) M admet une seule valeur propre $\lambda = 0$. Mais dans ce cas $\dim E_0 = 1 < 2$ et M n'est pas diagonalisable.
1.3. Démontrer l'assertion suivante : *On considère une matrice carrée M. Deux espaces propres de M associés à des valeurs propres différentes n'ont en commun que le vecteur nul.*
Soit $\vec{v} \in E_{\lambda_1}$, $\vec{v} \in E_{\lambda_2}$ et supposons $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Alors $M\vec{v} = \lambda_1\vec{v} = \lambda_2\vec{v}$. Alors

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v} = 0$$

Puisque $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ cette équation admet que le vecteur nul comme solution.