UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS — **2014/2015**
Faculté des Sciences — Algèbre 2
Département de Mathématiques — Partiel, Durée 1 h 15

Toute réponse doit être justifiée.

Exercice I.
On donne la matrice suivante dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner une définition du rang d'une matrice et calculer le rang des matrices : A et $A - 2I_3$.
2. Calculer les noyaux : $\ker A + 2I_3$ et $\ker A - I_3$.
3. Déterminer les valeurs propres de A et les espaces propres associés.
4. Proposer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.
5. Pour quelle valeur du paramètre $c \in \mathbb{R}$ a-t-on :

$$A^3 - A^2 - 4A = cI_3 \quad ?$$

6. Calculer la matrice inverse A^{-1} (vous pouvez utiliser la question précédente) et trouver $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Considérons la matrice $B = \frac{1}{3}(A + I_3)$.
   (a) Proposer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de B (vous pouvez utiliser les questions précédentes).
   (b) Exprimer $U_0 = (0, 0, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$. Soit $U_n = B^n U_0$. Calculer le vecteur U_n en fonction de n. En déduire le comportement de la suite U_n quand $n \to +\infty$.

Exercice II.

1. Quand dit-on qu'une matrice est diagonalisable ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les deux réels a et b pour que la matrice

$$M := \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$$

   soit diagonalisable.
3. Démontrer l'assertion suivante :
   Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Soient $\lambda_1 \neq \lambda_2$ deux valeurs propres de f et soient E_{λ_1}, E_{λ_2} les espaces propres associés. Alors le seul vecteur de l'intersection $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$ est le vecteur nul.