UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2015/2016**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Partiel, Durée 1h20, Corrigé

Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$.

1.1 Est-ce que le vecteur $\vec{u} = (0, 1, 0)$ est un vecteur propre de A ? Si oui, pour quelle valeur propre ?
On vérifie que $A\vec{u} = \vec{u}$. Alors $\vec{u}$ est un vecteur propre de A de valeur propre $\lambda = 1$.

1.2 Montrer que 2 est une valeur propre de A et déterminer l'espace propre correspondant.
On échelonne la matrice $A - 2I_3$: $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_2 \leftarrow -L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $rang(A - 2I_3) = 2 < 3$ et on en déduit que 2 est une valeur propre de A et

$$E_2 = \{(-z, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} = Vect((-1, 0, 1)).$$

1.3 Est-ce que 3 est une valeur propre de A ?
Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
On échelonne la matrice $A - 3I_3$: $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$, $L_1 \leftrightarrow L_2$:

$$, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $rang(A - 3I_3) = 2 < 3$ et on en déduit que 2 est une valeur propre de A et

$$E_3 = \{(y, y, 0) | y \in \mathbb{R}\} = Vect((1, 1, 0)).$$

Alors $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ convient.
1.4 Soit $P \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
Calculer la matrice P^{-1}, inverse de P.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5 Calculer $P^{-1}AP$.
Utiliser ce résultat pour déterminer l'ensemble des matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.
$D := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si une matrice C commute avec D alors elle est diagonale : $C =$

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Alors les matrices qui commutent avec A sont de la forme $PCP^{-1} = \begin{pmatrix} c & 0 & -b+c \\ -a+c & a & -a+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

2.1 Quand dit-on qu'une matrice est diagonalisable ?

Définition. Une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est **diagonalisable** s'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A.

Un resultat qui peut être accpté comme définition : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il existe une matrice $D \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale et une matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telles que $D = P^{-1}AP$.

2.2 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer le rang de $M - \lambda I_3$ en fonction de la valeur de λ.

La matrice M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

Si $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq 3$ alors $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 & 7 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ a de termes non-nuls sur la diagonale et $\operatorname{rg}(M - \lambda I_3) = 3$. Pour $\lambda = 3$

$$\operatorname{rg}(M - \lambda I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Par un calcul similaire $\operatorname{rg}(M - 2I_3) = 2$. Alors les valeurs propres de M sont $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$. Pour vérifier si M admet une base de vecteurs propres on calcule la dimension des espaces propres. Il est utile d'utiliser ici le théorème du rang

$$\dim E_2 = \dim \ker(M - 2I_3) = 3 - \operatorname{rg}(M - 2I_3) = 1.$$

De même $\dim E_3 = 1$. Mais

$$\dim E_2 + \dim E_3 = 2 < 3$$

Alors M n'est pas diagonalisable.

Exercice 3.

3.1 Rappeler l'énoncé du théorème du rang.

On considère une application linéaire $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Le rang de f est égal à la dimension de $Im(f)$ et on a la formule

$$\dim \ker f = \dim E - \dim Im(f).$$

3.2 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Désignons par C la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ donnée de $\mathbb{R}^3$.

3.2.1 Quelle est la matrice de la composée $u^2 = u \circ u$ dans la base $\mathcal{B}$?
C'est C^2 puisque la matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit de leurs matrices.

3.2.2 Montrer que le noyau $\ker u$ de u est un sous-espace vectoriel du noyau $\ker u^2$ de u^2.
En déduire que le rang de la matrice C^2 est inférieur ou égal au rang de C : $\operatorname{rg} C^2 \leq \operatorname{rg} C$.
On montre que si $x \in \ker u$ alors $x \in \ker u \circ u$:

$$x \in \ker u \iff u(x) = 0 \implies u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0 \iff x \in \ker u^2.$$

Alors $\ker u \subset \ker u^2$, ce qui implique que $\dim \ker u \leq \dim \ker u^2$ et d'après le théorème du rang

$$\operatorname{rg} C^2 = \operatorname{rg} u^2 = 3 - \dim \ker u^2 \leq 3 - \dim \ker u = \operatorname{rg} C.$$