UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2016/2017**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Partiel, Durée 1h20, Corrigé

Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1.
On travaille dans $\mathbb{R}^4$. On désigne par T l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -3 & -9 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

1.1 Vérifier que le vecteur $(1, 1, -3, 2)$ est un vecteur propre de A. Pour quelle valeur propre ? On désigne alors par E l'espace propre associé à cette valeur propre. Déterminer une base de E.
On calcule le produit de matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -3 & -9 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur considéré est donc un vecteur propre de valeur propre 3. L'espace propre E est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène de matrice $A - 3I_4$. La matrice

$$A - 3I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -6 & -9 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est de rang 1 et le système linéeaire se ramèene par exemple à la dernière équation. L'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel E_3 de dimension $4 - 1 = 3$ dont une base est la famille $((1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (3, 0, 0, 1))$.

1.2 Vérifier si 1 ou -1 est valeur propre de A ? Si oui déterminer une base de l'espace propre associé.
Pour vérifier si 1 est valeur propre de A on échelonne la matrice

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -4 & -9 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

en faisant les opérations suivantes $L_2 \leftarrow L_2 + 1/2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3/2L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 + 1/2L_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

On fait ensuite les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_4$, et on échange L_2 et L_4 pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $A - I_4$ est de rang 3. Le scalaire 1 est valeur propre de A et l'espace propre E_1 associé est de dimension $4 - 3 = 1$. Il engendré par le vecteur $(0, 1, -3, 1)$.
Puisque $\dim E + \dim E_1 = 4$ il n'y a pas d'autres valeurs propres.
1.3 Donner une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de A. On la désigne par $\mathcal{B}$. Calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}$ du vecteur $\vec{v} := (3, 0, 4, -1)$. Pour n entier, donner une expression de $T^n(\vec{v})$.
On considère la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = ((1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (3, 0, 0, 1), (0, 1, -3, 1))$. La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 4. Cette famille de vecteurs est donc une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$. Pour trouver les coordonnées de $\vec{v}$ on résout le système $\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 3 \\ \alpha + \delta = 0 \\ \beta - 3\delta = 4 \\ \gamma + \delta = -1 \end{cases}$
pour trouver $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = -1$. Comme $\mathcal{B}$ est formée de vecteurs propres de valeurs propres respectives $(3, 3, 3, 1)$ on obtient

$$T^n(\vec{v}) = 3^n \alpha \vec{u}_1 + 3^n \beta \vec{u}_2 + 3^n \gamma \vec{u}_3 + \delta \vec{u}_4 = 3^n(3, 1, 1, 0) + (0, 1, -3, 1)$$

Exercice 2.
On considère l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels.
2.1. Quelle est la dimension de V ? En donner une base. On la désignera désormais par $\mathcal{B}$.
Tout polynôme de degré au plus 2 a une écriture unique de la forme $aX^2 + bX + c$. La famille de polynômes $(1, X, X^2)$ est donc une base de l'espace vectoriel V qui est de dimension 3.

2.2 On considère l'application $f : V \to V$ définie par

$$f(P)(X) = P(X - 1).$$

Montrer que c'est une application linéaire et écrire sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
L'application f vérifie $f(P + Q) = f(P) + f(Q)$ et, pour λ scalaire réel, $f(\lambda P) = \lambda f(P)$. Elle est donc linéeaire. Dans la base $\mathcal{B}$ sa matrice est la suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Déterminer tous les vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire. Sa seule valeur propre est 1. La matrice $M - I_3$ est de rang 2. L'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension $3 - 2 = 1$. Il est égal au sous-espace vectoriel engendré par la constante 1. Il ne peut donc exister de base de vecteurs propres et f n'est pas diagonalisable.
2.4 Sauriez-vous généraliser ce résultat lorsque $V = \mathbb{R}_n[X]$?
Un vecteur propre de f est un polynôme non nul P tel que $P(X-1)$ est proportionnel à $P(X)$. Le terme de plus haut degré de $P(X-1)$ étant égal à celui de $P(X)$, la seule valeur propre possible est 1. Un vecteur propre de f est donc un polynome non nul P tel que $P(X-1) - P(X) = 0$. Si P est de degré $d > 0$, avec un terme de plus haut degré $a_d X^d$, $a_d \neq 0$, alors le terme de plus haut degré de $P(X-1) - P(X)$ est $da_d X^{d-1}$ et $P(X-1) - P(X)$ n'est pas nul. Reste le cas où P est de degré 0, c'est-à-dire une constante non nulle. Les seuls vecteurs propres de f sont donc les constantes non nulles. Il n'existe pas de base de vecteurs propres, sauf dans le cas $n = 0$ où f est l'identité.
2.5 Sauriez-vous généraliser ce résultat lorsque $V = \mathbb{R}[X]$ (espace vectoriel des polynômes) ?
Les seuls vecteurs propres de f sont les constantes non nulles.