UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2017/2018**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Partiel, Durée 1h25

Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (x - y, 2x - 2y, 4x - 4y + z).$$

1. Quelle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
2. Expliquer dans une seule phrase que veut dire qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est diagonalisable.
3. Expliquer brièvement l'algorithme que vous utilisez pour diagonaliser une matrice. Citer les définitions des termes mathématiques que vous utilisez dans la description.
4. Diagonaliser f, c'est-à-dire trouver explicitement une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$ soit diagonale. Calculer $Mat_{\mathcal{B}}(f)$.
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $f(P) = (X + 1)P' - P$.
2.1. Calculer l'image $f(aX^3 + bX^2 + cX + d)$ d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déduire $ker(f)$.
2.2. Pour quel Q de $\mathbb{R}_3[X]$, l'équation $f(P) = Q$ a-t-elle au moins une solution dans $\mathbb{R}_3[X]$? Donner une base de $Im(f)$.
2.3. Calculer $f((X + 1)^k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.
En déduire une caractérisation des polynômes Q de $\mathbb{R}_3[X]$ pour lesquels l'équation $f(P) = Q$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2.4. En utilisant les résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{R}_3[X]$ l'équation différentielle

$$(X + 1)P' - P = X^2 + 2X - 1$$

Exercice 3.
3.1 Rappeler l'énoncé du théorème du rang.

3.2 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Désignons par A la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

3.2.1 Quelle est la matrice de la composée $u^2 = u \circ u$ dans la base $\mathcal{B}$?

3.2.2 Montrer que le noyau $\ker u$ de u est un sous-espace vectoriel du noyau $\ker u^2$ de u^2.
En déduire que le rang de la matrice A^2 est inférieur ou égal au rang de A : $\operatorname{rg} A^2 \leq \operatorname{rg} A$.

3.3 Proposer une matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg} B^2 < \operatorname{rg} B$. Est-ce qu'il existe une telle matrice diagonalisable ?