ALGEBRE 1 PC/SF-Physique

Fiche 1 : LES NOMBRES COMPLEXES

Une lecture conseillée

A) Rappels

Au XVI° siècle en Italie, *Bombelli* introduit un nombre imaginaire : $\sqrt{-1}$, noté i depuis *Euler*,
avec la propriété imaginaire $$i^2 = -1$$
Avec les nombres réels et ce nouveau "nombre" apparaissent les nombres complexes sous leur forme algébrique :

$$z := x + iy \quad \text{avec} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Tous les calculs usuels, composés de sommes, différences, produits, quotients, puissances de telles expressions donnent toujours au final une expression de cette même forme, et ils vérifient les mêmes propriétés calculatoires usuelles qu'on avait auparavant avec les rationnels ou les réels.
On résume cela aujourd'hui en disant que ces ensembles de nombres : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et maintenant $\mathbb{C}$, ont une structure de corps commutatif pour les lois internes d'addition et de multiplication.

Les réels x et y sont appelés partie réelle et partie imaginaire de z et notés
$$\mathrm{Re}(z) := x \text{ et } \mathrm{Im}(z) := y$$

Le nombre $x - iy$, qui apparait fréquemment dans les calculs, est alors appelé conjugué de z et noté $\bar{z}$.
On a ainsi par exemple $$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$
$$\text{et} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,, \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{et} \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}.$$

Les nombres complexes sont ensuite représentés sur le plan d'*Argand* muni d'un repère orthonormé.
Le point M de coordonnées (x, y) est appelé image du complexe $z_M = x + iy$, et z_M appelé l'affixe de M.

A tout vecteur $\vec{v}$ du plan est aussi associé une affixe $z_{\vec{v}}$: celle z_M du point M défini par $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$.

Ainsi, pour $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ $\left(\vec{v} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right.$ par relation de *Chasles* $\left.\right)$, l'affixe de $\vec{v}$ n'est autre que
$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

Alignement : $$A, B, C \text{ distincts sont alignés} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ est réel.}$$

Le repérage des points du plan par leurs coordonnées polaires (ρ, θ) conduit à
la forme trigonométrique $$z = \rho\,(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta))$$
et aux notions de module et argument $$|z| := \rho = \sqrt{z\bar{z}} \text{ et } Arg(z) := \theta \bmod (2\pi)$$
et leurs propriétés : $|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|$, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (inégalité triangulaire), et pour z_1 et z_2 non nuls :
$$Arg(z_1 z_2) = (Arg(z_1) + Arg(z_2)) \mod(2\pi) \text{ et } Arg(\tfrac{z_1}{z_2}) = (Arg(z_1) - Arg(z_2)) \mod(2\pi)$$
Les notions usuelles de géométrie euclidienne se traduisent, par exemple :
Distance : $$d(A, B) = |z_B - z_A|$$
Perpendicularité : $$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} \text{ est imaginaire pur} \iff Arg(z_{\vec{u}}) - Arg(z_{\vec{v}}) = \tfrac{\pi}{2} \mod(\pi).$$
Exemple d'application : *Une preuve de la loi du cosinus* (généralisation du thm de Pythagore à un triangle quelconque).

Les formules d'addition des cosinus et sinus amènent à la formule de *de Moivre*
$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Et, la propriété $(\cos + i\sin)(\theta) \times (\cos + i\sin)(\theta') = (\cos + i\sin)(\theta + \theta')$ rappelant celle de l'exponentielle,
conduit à la notation d'*Euler* $$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$
et à l'introduction de la forme exponentielle $$z = \rho e^{i\theta} \quad \text{ou encore} \quad z = |z|\ e^{iArg(z)}.$$

Exercice : Rappeler l'identité du parallélogramme et en donner une démonstration simple à l'aide des nombres complexes. (Ce qui redonne une preuve simple du théorème d'*Apollonius* sur la médiane d'un triangle).

B) Compléments

Formulation complexe de quelques transformations usuelles du plan

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ désignant le repère orthonormé du plan usuel :

Translation de vecteur $\vec{w}$: $M' = t_{\vec{w}}(M) \iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}}$

Homothétie de centre Ω, de rapport k : $M' = h_{\Omega,k}(M) \iff z_{M'} - z_\Omega = k\,(z_M - z_\Omega)$

Rotation de centre Ω, d'angle θ : $M' = R_{\Omega,\theta}(M) \iff z_{M'} - z_\Omega = e^{i\theta}\,(z_M - z_\Omega)$

Réflexion d'axe $\Delta\left(\Omega, \vec{d}\right)$: $M' = S_\Delta(M) \iff z_{M'} - z_\Omega = e^{2i\alpha}\,\overline{(z_M - z_\Omega)}$ où $\alpha = \widehat{\left(\vec{u}, \vec{d}\right)}$

Structure de corps commutatif $(\mathbb{C}, +, \times)$:

$(\mathbb{C}, +)$ groupe additif : associativité et commutativité de $+$, neutre 0, opposé.
$(\mathbb{C}, +, \times)$ anneau unitaire : associativité de $\times$, distributivité de $\times$ sur $+$, neutre 1.
commutatif, intègre : commutativité et intégrité de $\times$.

Lectures *Groupes abéliens* } *Structures algébriques*

Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Racines carrées :
$Z = A + iB$ étant un nombre complexe donné, on cherche les nombres $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = Z$.
En posant $z = x + iy$, on a alors

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z^2) & = \mathrm{Re}(Z) \\ \mathrm{Im}(z^2) & = \mathrm{Im}(Z) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 & = A \\ 2xy & = B \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 & = A \\ x^2 + y^2 & = |Z| \\ 2xy & = B \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 & = \dfrac{|Z| + A}{2} \\ y^2 & = \dfrac{|Z| - A}{2} \\ 2xy & = B \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = \varepsilon\sqrt{\dfrac{|Z| + A}{2}} \\ y & = \varepsilon'\sqrt{\dfrac{|Z| - A}{2}} \end{cases} \quad \text{où } \varepsilon = \pm 1 \text{ , et } \varepsilon' = sgn(B)\,\varepsilon. \quad (\ sgn(B) \text{ désignant le signe de } B\ )$$

on obtient ainsi les deux racines carrées $z_\pm = \pm(x + iy)$ de Z, elles sont naturellement opposées.

Equations du second degré :
Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, à coefficients $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.

$$(E) \iff z^2 + \frac{b}{a}z = -\frac{c}{a} \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de (E).
En notant δ l'une au choix des deux racines carrées (opposées) de Δ on obtient les deux racines (confondues si $\Delta = 0$) de l'équation (E) : $z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$. Changer le choix de δ ne fait qu'échanger z_1 et z_2.

Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe

Pour $Z = 0$ l'équation $z^n = Z$ n'admet qu'une solution (on dit aussi une racine), à savoir $z = 0$.
Pour $Z \neq 0$, elle admet toujours exactement n racines distinctes, appelées racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z.
Pour les déterminer théoriquement prenons la forme exponentielle $Z = \rho e^{i\theta}$ de Z, où $\rho = |Z|$ et $\theta = Arg(Z)$ et cherchons z sous sa forme exponentielle $z = re^{i\alpha}$ où $r = |z|$ et $\alpha = Arg(z)$.

$$\text{On a alors} \quad z^n = Z \iff r^n e^{in\alpha} = \rho e^{i\theta} \iff \begin{cases} r^n & = \rho \\ n\alpha & = \theta + k2\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = & \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = & \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} \text{ , } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff z = \sqrt[n]{\rho}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

Lorsque k parcourt $\mathbb{Z}$ le complexe $z_k := \sqrt[n]{\rho}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}$ parcourt les n sommets du polygone régulier à n cotés de centre O et dont un sommet est le point M_0 d'affixe $z_0 = \sqrt[n]{\rho}\ e^{i\frac{\theta}{n}}$.
Ainsi $z_0, \cdots, z_{n-1}$ sont les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z.

Propriété : La somme des n racines n-ièmes de tout nombre complexe Z est nulle.
Preuve : cours suivant avec les relations symétriques de Viète sur les racines d'un polynôme, ici le polynôme $X^n - ZX^0$.

Linéarisation

Calcul de $\cos^n(x)$ et de $\sin^n(x)$ en fonction de $\cos(px)$ et/ou $\sin(px)$ pour des entiers $p \leqslant n$.

Partant des formules d'Euler $\qquad \cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad$ et $\quad \sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

en utilisant la formule du binôme de *Newton* en regroupant les exponentielles complexes conjuguées, puis en réutilisant les formules d'Euler, on fait apparaître des multiples de $\cos(px)$ et/ou de $\sin(px)$ pour des entiers $p \leqslant n$.
Exemples :

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) = \left(\tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 &= \tfrac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\\
&= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+3\ \tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\\
&= \tfrac{1}{4}\cos(3x)+\tfrac{3}{4}\cos(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^5(x) = \left(\tfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 &= \tfrac{1}{32i}\left(e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}\right)\\
&= \tfrac{1}{16}\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}-5\ \frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}+10\ \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\\
&= \tfrac{1}{16}\sin(5x)-\tfrac{5}{16}\sin(3x)+\tfrac{5}{8}\sin(x)
\end{aligned}$$

Expressions de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ sous forme polynomiale en $\cos(x)$ et $\sin(x)$

Partant de la formule de *de Moivre* $\qquad (\cos(x)+i\sin(x))^n = \cos(nx)+i\sin(nx)$

on voit que $\qquad \cos(nx) = \mathrm{Re}\,(\cos(x)+i\sin(x))^n$

et $\qquad \sin(nx) = \mathrm{Im}\,(\cos(x)+i\sin(x))^n$

En développant $(\cos(x)+i\sin(x))^n$ par la formule de Newton, on obtient sa forme algébrique, on en tire alors sa partie réelle $\cos(nx)$ et sa partie imaginaire $\sin(nx)$ sous la forme d'expressions polynomiales en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Exemple : avec $\qquad (\cos(x)+i\sin(x))^3 = \cos^3(x)+3i\cos^2(x)\ \sin(x)-3\cos(x)\ \sin^2(x)-i\sin^3(x)$

on obtient $\qquad \cos(3x) = \cos^3(x)-3\cos(x)\ \sin^2(x) = 4\cos^3(x)-3\cos(x)$

et $\qquad \sin(3x) = 3\cos^2(x)\ \sin(x)-\sin^3(x) = -4\sin^3(x)+3\sin(x)$

On peut remarquer qu'en utilisant la relation $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ on pourra toujours exprimer $\cos(nx)$ sous forme polynomiale de $\cos(x)$ seulement, et $\sin(nx)$ sous forme polynomiale de $\sin(x)$ seulement.

Réduction de $a\cos(x)+b\sin(x)$ sous la forme $A\cos(x-\varphi)$

Pour $(a,b)\neq(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, on a $\sqrt{a^2+b^2}>0$ et le point $M\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ est sur le cercle unité,
il existe alors $\varphi\in\mathbb{R}$ tel que $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = (\cos(\varphi)\ ,\ \sin(\varphi)\ )$.

Avec $A=\sqrt{a^2+b^2}$ et la formule $\cos(x)\ \cos(\varphi)+\sin(x)\ \sin(\varphi)=\cos(x-\varphi)$, on obtient la réduction voulue.

Similitudes directes

Une similitude directe est une transformation du plan ($M\mapsto M'$) telle que $z_{M'} = a\ z_M + b$ où $a\neq 0$ et b sont deux complexes donnés.

Si $a=1$, elle n'admet pas de point fixe, c'est la translation de vecteur $\vec{b}$ d'affixe b.

Si $a\neq 1$, elle admet un unique point fixe Ω, appelé centre de la similitude, c'est le point d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, et dans ce cas on vérifie aisément que c'est la composée de la rotation $R_{\Omega,\alpha}$ et de l'homothétie $h_{\Omega,k}$ de même centre Ω, respectivement d'angle $\alpha = Arg(a)$ et de rapport $k=|a|$, qui commutent entre elles :

$$\mathcal{S}_{\Omega,k,\alpha} = R_{\Omega,\alpha}\circ h_{\Omega,k} \ = \ h_{\Omega,k}\circ R_{\Omega,\alpha}$$

De plus si $a\neq 1$, il est aisé de voir qu'elle est bijective et que sa bijection réciproque est aussi une similitude directe, plus précisément celle de centre Ω, de rapport $\frac{1}{k}$, et d'angle $-\alpha$:

$$(\mathcal{S}_{\Omega,k,\alpha})^{-1} = \mathcal{S}_{\Omega,\frac{1}{k},-\alpha}$$

La composée de deux similitudes directes est une similitude directe, les rapports se multiplient et les angles s'additionnent, mais elles ne commutent entre elles que lorsqu'elles sont de même centre.