ALGEBRE 1 PC/SF-Physique

Fiche 3 : Systèmes linéaires et notations matricielles

A) Equations et systèmes linéaires sur un corps $\mathbb{K}$

$\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On appelle équation linéaire de **variables ordonnées** $x_1, \cdots, x_n$ dans un corps $\mathbb{K}$, une équation de la forme

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

où $a_1, \cdots, a_n$ et b sont des coefficients donnés dans $\mathbb{K}$ et $(x_1, \cdots, x_n)$ un n-uplet de variables ordonnées pouvant prendre leurs valeurs dans $\mathbb{K}$, aussi appelé le **n-uplet inconnu**.

x_1 est la variable dite **d'ordre** $1, \cdots, x_n$ la **variable d'ordre n**.

$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ est appelé **le premier membre** de l'équation.
Le coefficient b est appelé **le second membre** de l'équation. S'il est nul, l'équation est dite **homogène**.

Un élément $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ est **une solution de l'équation** si $a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = b$ dans $\mathbb{K}$.

Une équation de premier membre nul est dite **triviale** car elle est soit **trivialement impossible** (si $b \neq 0$), soit **trivialement inutile** (si $b = 0$) car vérifiée par tous les éléments de $\mathbb{K}^n$.

On appelle **variable de tête** d'une équation non triviale, la variable d'ordre minimal qui soit affectée d'un coefficient non nul dans l'équation.
On appelle **ordre d'une équation**, l'ordre de sa variable de tête.

On appelle **système linéaire**, une liste ordonnée S d'un nombre fini d'équations linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}$, de mêmes variables ordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$.
Exemple :

$$S = \left\{ \begin{array}{lllllll} & -y & -2z & & +3u & -4v & = 1 \\ 2x & +3y & +z & -2t & & & = 0 \\ 0x & +0y & +0z & +0t & +0u & +0v & = 0 \\ 0x & +0y & +0z & +0t & +0u & +0v & = 5 \end{array} \right.$$ est un système linéaire de 4 équations de variables (x, y, z, t, u, v).

z en est la variable d'ordre 3 et u celle d'ordre 5.
La première équation est d'ordre 2, sa variable de tête est y.
La seconde équation est d'ordre 1, sa variable de tête est x.
La troisième équation est triviale, inutile.
La quatrième équation est triviale, impossible.

$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ est **une solution du système** s'il est solution de chacune des équations du système.

On notera $\mathcal{S}o\ell(S)$ la partie de $\mathbb{K}^n$ constituée de toutes les solutions de S.

Avertissement : Dans toute la suite on écrira **"système"** pour "système linéaire" et **"équation"** pour "équation linéaire"

B) Systèmes échelonnés

Un système est dit **échelonné** si l'ordre de chacune de ses équations non triviales est strictement supérieur à l'ordre de la précédente, et que ses éventuelles équations triviales sont situées sous toutes ses équations non triviales.

Exemple : $$\left\{ \begin{array}{lllllll} 2x & +3y & +z & -2t & & & = 8 \\ & & -2z & & +3u & -4v & = 6 \\ 0x & +0y & +0z & +0t & +0u & +0v & = 0 \\ 0x & +0y & +0z & +0t & +0u & +0v & = 3 \end{array} \right.$$ est un système échelonné.

Système échelonné impossible : C'est un système échelonné qui contient au moins une équation impossible, il n'admet alors aucun n-uplet solution.

Système échelonné compatible : c'est un système échelonné qui n'a aucune équation impossible.
Ses éventuelles équations triviales sont inutiles et peuvent être supprimées.

Exemple : Un système échelonné d'équations homogènes est toujours un système compatible, il admet toujours au moins le n-uplet $(0, \cdots, 0)$ pour solution.

Résolution d'un système échelonné.

Le **cas d'un système échelonné impossible** est réglé d'avance, il n'admet aucune solution.

Un système échelonné compatible, une fois supprimées ses éventuelles équations triviales inutiles, est un système échelonné de p équations avec $p \leqslant n$, il possède donc p variables de têtes (certains les appellent les variables liées), et les $n-p$ variables restantes (il y en a si p<n) sont appelées **les variables libres**.

Le **cas d'un système échelonné de $p = n$ équations non triviales**, est facile à traiter.
Toujours compatible, il ne possède pas de variables libres et admet alors un unique n-uplet solution que l'on calcule en commençant par la dernière équation qui donne la seule valeur possible de la dernière variable, puis en reportant de proche en proche dans les équations précédentes on trouve successivement les seules valeurs possibles des variables précédentes, si bien qu'au bout du compte on obtient l'unique n-uplet solution du système.

Le **cas d'un système échelonné de $p < n$ équations non triviales** demande un peu plus d'attention.
Pour déterminer les n-uplets solutions d'un tel système, la première étape consiste à exprimer chacune des variables de tête en fonction des $n-p$ variable(s) libre(s), on commence par celle de la dernière équation, puis on passe à celle de l'avant dernière et ainsi de suite jusqu'à celle de la première équation.
Les variables libres servent alors de paramètres pour décrire l'ensemble $\mathcal{S}o\ell(S)$ de tous les n-uplets solutions du système.
Dans ce cas, un exemple vaut mieux qu'un long discours :

Soit le système échelonné $S = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & +3y & +z & -2t & & +v & =4 \\ & & -2z & -t & +3u & +4v & =1 \\ & & & t & +2u & -v & =2 \end{array} \right.$ d'inconnue $(x,y,z,t,u,v) \in \mathbb{R}^6$.

$x, z,$ et t en sont les variables de tête, et y, u, v les variables libres .

La dernière équation nous donne $t = 2 - 2u + v$,
avec la précédente on en déduit $z = -\frac{1}{2}(1 + t - 3u - 4v) = -\frac{1}{2}(3 - 5u - 3v) = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}u + \frac{3}{2}v$,
et enfin avec la première il vient :
$x = 4 - 3y - z + 2t - v = 4 - 3y + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}u - \frac{3}{2}v + 2(2 - 2u + v) - v = \frac{19}{2} - 3y - \frac{13}{2}u - \frac{1}{2}v.$

L'ensemble des 6-uplets solutions de S est alors :
$\mathcal{S}o\ell(S) = \left\{ \left(\frac{19}{2} - 3y - \frac{13}{2}u - \frac{1}{2}v \ ,\ y \ , -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}u + \frac{3}{2}v,\ 2 - 2u + v \ ,\ u \ ,\ v \ \right) \in \mathbb{R}^6 \mid y, u, v \in \mathbb{R} \right\}.$
Les variables libres y, u et v jouent alors le rôle de paramètres permettant de décrire l'infinité des 6-uplets solutions du système, attention à ne pas les oublier car vous seriez conduits pour cet exemple à proposer des triplets comme solutions de S, ce qui est une erreur grossière car toute solution de S est un 6-uplet.

Structure affine de l'ensemble des solutions d'un système échelonné compatible.

Sur l'exemple précédent, en réécrivant $\mathcal{S}o\ell(S)$ sous la forme
$\mathcal{S}o\ell(S) = \left\{ \left(\frac{19}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 2, 0, 0\right) + y\,(-3, 1, 0, 0, 0, 0) + u\left(-\frac{13}{2}, 0, \frac{5}{2}, -2, 1, 0\right) + v\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 1, 0, 1\right) \in \mathbb{R}^6 \mid y, u, v \in \mathbb{R} \right\},$
il apparait que c'est le sous-espace affine de $\mathbb{R}^6$ passant par le point $\left(\frac{19}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 2, 0, 0\right)$ et de vecteurs directeurs $(-3, 1, 0, 0, 0, 0)$, $\left(-\frac{13}{2}, 0, \frac{5}{2}, -2, 1, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 1, 0, 1\right)$.
Le nombre de vecteurs directeurs (3 sur notre exemple) nécessaires à sa description est appelé la dimension de ce sous-espace affine, elle n'est autre que le nombre de variables libres du système.
Si cette dimension est nulle, le sous-espace est réduit à un seul point de $\mathbb{K}^n$, si elle vaut 1 on parle de droite affine, et si elle vaut 2 on parle de plan affine de $\mathbb{K}^n$.

Structure vectorielle de l'ensemble des solutions d'un système échelonné homogène.

Lorsque qu'un système échelonné est homogène, ses solutions forment un sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$ qui passe par $(0, \cdots, 0)$. C'est une partie de $\mathbb{K}^n$ qui est stable par addition et par multiplication externe, autrement dit stable par (toutes) combinaisons linéaires. Une telle partie est appelée un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
Le nombre de vecteurs directeurs nécessaires à sa description est appelé la dimension de ce sous-espace vectoriel, elle n'est autre que le nombre de variables libres du système.
Si cette dimension est nulle, ce sous-espace vectoriel se réduit au n-uplet nul de $\mathbb{K}^n$. si elle vaut 1 on parle de droite vectorielle, et si elle vaut 2 on parle de plan vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

C) Codage matriciel d'un système

Pour ne pas avoir à réécrire sans cesse les inconnues lors de la résolution d'un système, une fois précisé l'ordre des variables, on convient de ranger dans un tableau les coefficients qui définissent le système.

Matrice d'un système :
On appelle matrice du système, le tableau à p lignes et n colonnes, formé par les coefficients successifs des premiers membres de chacune des p équations du système.

La matrice A du système de l'exemple précédent est $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

On note $M(p, n, \mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes de coefficients dans $\mathbb{K}$.

Matrice élargie d'un système :
La matrice A du système représente les premiers membres, on complète l'information en codant le système par le tableau obtenu en rajoutant la colonne b formée par les seconds membres $b_1, \cdots, b_p$ de chacune des p équations du système.
Comme les seconds membres ne jouent pas le même rôle que les coefficients des n colonnes de la matrice, on sépare dans le tableau la colonne des seconds membres par une barre verticale.
Le tableau ainsi obtenu est appelée matrice élargie du système et code complètement ce dernier.

La matrice élargie $(A|b)$ du système de l'exemple précédent est $(A|b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

D) Systèmes équivalents et réduction par algorithme de Gauss

Systèmes équivalents

Deux systèmes S et T de mêmes variables ordonnées $x_1, \cdots, x_n$ sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions : $\quad S \underset{déf}{\Longleftrightarrow} T \quad$ si et seulement si $\quad \mathcal{S}o\ell(S) = \mathcal{S}o\ell(T)$

La résolution d'un système s'appuie de manière essentielle sur cette équivalence, elle consiste à transformer le système de départ en des systèmes équivalents successifs pour parvenir au final à un système dont les solutions sont faciles à mettre en évidence.

Transformations élémentaires de Gauss :

Sur les équations du système

Parmi toutes les transformations qui font passer d'un système à un système équivalent, on en retiendra certaines, très simples, appelées **transformations élémentaires de Gauss**, elles sont de trois type :

1) **Echanger** les positions de **deux équations** dans le système.
2) **Multiplier une équation** du système **par une constante non nulle** $\lambda \in \mathbb{K}$.
3) **Ajouter à une équation** du système **un multiple d'une autre** équation du système.

Sur les lignes de la matrice élargie du système

Les transformations de Gauss sur les équations du système se traduisent naturellement par des transformations de Gauss sur les lignes de la matrice élargie du système :

1) **Echanger** les positions de **deux lignes** de la matrice élargie.
2) **Multiplier une ligne** de la matrice élargie **par une constante non nulle** $\lambda \in \mathbb{K}$.
3) **Ajouter à une ligne** de la matrice élargie **un multiple d'une autre ligne** de cette matrice élargie.

Théorème de réduction de Gauss

Tout système est équivalent à un système échelonné.

Plus précisément, il existe une suite finie de transformations élémentaires de Gauss qui transforme le système en un système échelonné.
Preuve par Algorithme de Gauss : méthode du pivot.
On pourrait pousser ce théorème de réduction un peu plus loin avec la notion de système échelonné réduit comme décrit dans le *Support 2* paragraphe 2.4.

E) Rang d'un système, rang d'une matrice

Propriété
Si deux systèmes échelonnés compatibles $S_{éch}$ et $T_{éch}$ sont équivalents alors ils ont le même nombre de variables de tête. *Preuve : même nombre de variables libres, la dimension de leur espace des solutions.*

On appelle **rang d'un système échelonné compatible** le nombre de ses variables de tête.

Rang d'un système homogène
On appelle rang d'un système homogène le rang de tout système échelonné compatible qui lui est équivalent.
L'existence d'un tel système est assuré par le théorème de réduction et le fait qu'un système homogène n'est jamais impossible.

Rang d'une matrice
Toute matrice $M \in M(p, n, \mathbb{K})$ à p lignes et n colonnes définit un unique système homogène de p équations de variables ordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathbb{K}$.
On appelle rang de la matrice M le rang de ce système homogène.

Rang d'un système quelconque :
On appelle rang d'un système le rang de la matrice de ses premiers membres.
Autrement dit le rang d'un système S est le rang de son **système homogène associé** $S_{hom} \underset{déf}{=}$ le système obtenu en remplaçant tous les seconds membres du système S par des 0.

Propriété fondamentale du rang :
Le rang d'un système (ou d'une matrice) est invariant par toute transformation élémentaire de Gauss.

F) Lien géométrique entre $\mathcal{S}o\ell(S)$ et $\mathcal{S}o\ell(S_{hom})$

Propriété : La différence de deux quelconques des n-uplets solutions d'un système S est un n-uplet solution du système homogène S_{hom} associé à S.

Conséquence : Si on connait une solution particulière $s_{part} \in \mathcal{S}o\ell(S)$ d'un système S, pour les avoir toutes il suffit de connaitre les solutions du système homogène associé S_{hom}.

Plus précisément on a
$$\mathcal{S}o\ell(S) \ = \ s_{part} + \mathcal{S}o\ell(S_{hom})$$

Le lecteur avisé reconnaitra là le fait que $\mathcal{S}o\ell(S)$ est le sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$ passant par s_{part} et de direction $\mathcal{S}o\ell(\mathcal{S}_{hom})$, ou encore le translaté de $\mathcal{S}o\ell(S_{hom})$ par la translation de vecteur s_{part}.

G) Discussion des solutions d'un système paramétré

Si le ou les paramètres n'interviennent qu'aux seconds membres du système, la discussion est assez facile.
Par transformations de Gauss on se ramène à un système échelonné équivalent, et on est alors amené à discuter sur le fait que ses éventuelles équations triviales pourront être inutiles ou impossibles selon les valeurs prises par le ou les paramètres.
On distinguera alors deux situations en fonction des valeurs du ou des paramètres :
Dans les cas où l'une des équations triviales est impossible on conclut que le système n'admet pas de solution. Dans les cas où aucune équation triviale n'est impossible, le système échelonné obtenu admettra une ou une infinité de solutions facilement obtenues par résolution comme dans le cas sans paramètre, les n-uplets solutions s'exprimeront alors par des formules où le ou les paramètres pourront apparaître comme des constantes.

Plus délicate est la situation où un ou des paramètres interviennent dans la matrice du système car dans ce cas la mise en oeuvre de la réduction par transformation de Gauss pourra être différente suivant les valeurs prises par le ou les paramètres.
Il conviendra toujours de commencer par mener la réduction le plus loin possible sans avoir à discuter les différents cas, pour ne commencer à les distinguer que sur un système déjà assez simple.
Pour cela on évitera tant que cela sera possible de choisir un pivot dont la non nullité serait discutable selon les valeurs du ou des paramètres.

Si un ou des paramètres interviennent à la fois dans la matrice et aux seconds membres du système, on commencera par mener la réduction le plus loin possible en choisissant, tant que cela est possible, des pivots dont la non nullité est assurée quelle que soit les valeurs des paramètres. On discutera ensuite selon les valeurs des paramètres la présence ou non d'équations triviales impossibles et on conclura selon les cas en terminant de résoudre les systèmes distingués.

Plusieurs exemples illustrant bien ces remarques figurent dans le *Support 2* paragraphe 4, **à lire impérativement** pour y voir des erreurs courantes à ne pas commettre, et comprendre comment les éviter.