ALGEBRE 1 PC/SF-Physique

Fiche 4 : Combinaisons linéaires et structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Une lecture interactive conseillée

$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou plus généralement un corps commutatif.

Une expression de la forme $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ sera appelée **combinaison linéaire** des éléments $e_1, \cdots, e_n$ d'un ensemble E, de coefficients $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, si elle définit un unique élément de E.

A) Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$)

On dit que E a une structure de **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** si on peut combiner linéairement tout nombre fini de n'importe lesquels de ses éléments, avec des coefficients dans $\mathbb{K}$, avec les mêmes *8 propriétés de calcul* que celles couramment utilisées pour combiner linéairement les vecteurs du plan ou de l'espace, avec des coefficients réels.

C'est cette similarité dans les calculs qui a conduit à qualifier de "**vecteurs**" des éléments qu'on peut combiner linéairement, et de $\mathbb{K}$-espace vectoriel tout ensemble de tels éléments, muni des deux opérations (addition et multiplication externe) permettant de les combiner linéairement avec des coefficients de $\mathbb{K}$.

Divers exemples de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

Les ensembles suivants ont une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les opérations d'addition, et de multiplication externe par un réel, dont ils sont naturellement munis :
$\mathbb{R}$ lui-même, $\mathbb{R}^2$,..., $\mathbb{R}^n$,
$\mathbb{C}$,..., $\mathbb{C}^n$,
$\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{C}_n[X]$
$EqLin_{\mathbb{R}}(x_1, \cdots, x_n)$ les équations linéaires de variables $(x_1, \cdots, x_n)$ réelles et à coefficients réels,
$EqLin_{\mathbb{C}}(x_1, \cdots, x_n)$ les éq. linéaires de variables $(x_1, \cdots, x_n)$ complexes et à coefficients complexes,
$\mathcal{M}(p, n, \mathbb{R})$, $\mathcal{M}(p, n, \mathbb{C})$ les matrices de taille $p \times n$ à coefficients réels , ou celles à coefficients complexes,

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les suites réelles indicées sur $\mathbb{N}$,
$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ les suites complexes indicées sur $\mathbb{N}$,
$\mathbb{R}^D$ les applications d'un ensemble non vide quelconque D dans $\mathbb{R}$,

$\mathbb{R}[X]^D$ les applications d'un ensemble non vide quelconque D dans $\mathbb{R}[X]$,

F^D les applications d'un ensemble non vide quelconque D dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque F.

Divers exemples de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

Les ensembles suivants ont une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les opérations d'addition et de multiplication externe par un complexe, dont ils sont naturellement munis :
$\mathbb{C}$ lui même , $\mathbb{C}^2, \cdots, \mathbb{C}^n$,
$\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{C}_n[X]$,
$EqLin_{\mathbb{C}}(x_1, \cdots, x_n)$ les équations linéaires de variables $(x_1, \cdots, x_n)$ complexes et à coefficients complexes,
$\mathcal{M}(p, n, \mathbb{C})$ les matrices à p lignes et n colonnes à coefficients complexes,

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ les suites complexes indicées sur $\mathbb{N}$,
$\mathbb{C}^D$ les applications d'un ensemble non vide quelconque D dans $\mathbb{C}$,

$\mathbb{C}[X]^D$ les applications d'un ensemble non vide quelconque D dans $\mathbb{C}[X]$

F^D les applications d'un ensemble non vide quelconque D dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque F .

Assurez-vous que pour chacun de ces exemples vous savez naturellement identifier le vecteur nul 0_E, additionner deux vecteurs, et calculer un multiple d'un vecteur.

Vous avez remarqué que le même ensemble E peut avoir différentes structures d'espace vectoriel, par exemple on verra que $\mathbb{C}$ a une structure de droite vectorielle sur lui-même et une structure de plan vectoriel sur $\mathbb{R}$.

B) Sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

Si une partie non vide F de E est **stable** par addition et par multiplication externe, on peut alors restreindre ces opérations aux seuls éléments de F et dans ce cas F hérite naturellement d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelée **structure de sous-espace vectoriel** de E.

Remarques :

1) Tout s.e.v de E contient forcément le vecteur nul 0_E.
2) E et $\{O_E\}$ sont trivialement des s.e.v de E.
3) Un s.e.v d'un s.e.v de E est un s.e.v de E.
4) Tout s.e.v de E est stable par combinaisons linéaires.
5) Réciproquement toute partie non vide de E, stable par combinaisons linéaires est un s.e.v de E.

Exemples :

1) $\mathbb{R}_n[X]$ est un s.e.v de $\mathbb{R}[X]$.
2) $\mathbb{R}^2$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ (*ce n'est même pas une partie de* $\mathbb{R}^3$!).
3) Les fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ forment un s.e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3') Les fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ forment un s.e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4) Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 3 forment un s.e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Les sous-espaces vectoriels classiques

Les droites vectorielles de E

Si E est non réduit au vecteur nul alors pour tout vecteur $v \neq 0_E$, l'ensemble noté $\mathbb{K}v$ des multiples de v est un s.e.v de E appelé droite vectorielle de E de vecteur directeur v.

Les s.e.v $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(\mathcal{P})$ de E engendrés par une partie de E

Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de E, il existe un unique s.e.v de E minimal qui contient $\mathcal{P}$: il est formé de toutes les combinaisons linéaires d'éléments quelconques de $\mathcal{P}$, on l'appelle le s.e.v de E engendré (par combinaisons linéaires) par $\mathcal{P}$ et il est noté $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(\mathcal{P})$.
Il est minimal dans le sens où tous les s.e.v de E qui contiennent $\mathcal{P}$ le contiennent forcément.

On peut par exemple énoncer maintenant le théorème sur les systèmes $p \times n$ impossibles ainsi :

Le système $(A|b)$ est impossible dans $\mathbb{K}^n \iff b \notin \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(Col_1(A), ..., Col_n(A))$ dans $\mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K})$

ou si vous préférez :

Le système $(A|b)$ est compatible dans $\mathbb{K}^n \iff b \in \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(Col_1(A), ..., Col_n(A))$ dans $\mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K})$

Les s.e.v de "dimension finie" de E :

On appelle s.e.v de "dimension finie" de E tout s.e.v de E **engendré par une partie finie** $\mathcal{F}$ de E.
On précisera plus loin que la dimension d'un tel s.e.v est le nombre minimal de vecteurs qu'une partie doit contenir pour pouvoir l'engendrer (des parties de E différentes peuvent engendrer le même s.e.v de E).

Exemples :

a) Les droites vectorielles de E sont de dimension finie (égale à 1). *Preuve facile* : $\mathbb{K}v = \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(\{v\})$.

b) Les plans vectoriels de E : ce sont les s.e.v de E de la forme $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(\{v_1, v_2\})$ où v_1, v_2 sont deux vecteurs de E **non proportionnels**. Un plan vectoriel est de dimension finie égale à 2.
On dit que les vecteurs v_1, v_2 forment un couple de **vecteurs directeurs** du plan $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(\{v_1, v_2\})$ de E.
Exemples de plans vectoriels :

$\mathbb{R}^2$ est un plan vectoriel du $\mathbb{R}$-e.v $E = \mathbb{R}^2$ lui-même.

$\mathbb{C}$ est un plan vectoriel du $\mathbb{R}$-e.v $E = \mathbb{C}$ lui-même.

$\mathbb{C}$ n'est pas un plan vectoriel du $\mathbb{C}$-e.v $E = \mathbb{C}$ lui-même, il en est une droite vectorielle.

$\mathbb{C}^2$ est un plan vectoriel du $\mathbb{C}$-e.v $E = \mathbb{C}^2$ lui-même.

$\mathbb{C}^2$ n'est pas un plan vectoriel du $\mathbb{R}$-e.v $E = \mathbb{C}^2$ lui-même, on verra plus loin que dans ce cas sa dimension est 4 et non pas 2 .

$\mathbb{R}_1[X]$ est un plan vectoriel du $\mathbb{R}$-ev $E = \mathbb{R}[X]$.

c) Tout s.e.v de $\mathbb{K}^n$ qui est caractérisé par un système linéaire homogène est de dimension finie. (on verra plus loin que tout s.e.v de $\mathbb{K}^n$ peut être caractérisé par un système linéaire homogène).

Remarque : $\mathbb{K}^n$ est un s.e.v de dimension finie de lui-même, on dit que c'est un e.v de dimension finie.

C) Intersections, sommes, et sommes directes de s.e.v de E

L'intersection de deux ou plusieurs s.e.v de E est un s.e.v de E, et de chacun d'entre eux aussi.

L'union de deux ou plusieurs s.e.v de E n'est en général pas un s.e.v de E.

Sous-espace vectoriel somme de deux ou plusieurs s.e.v de E

Si $F_1, \cdots, F_n$ sont des s.e.v de E alors

$$F_1 + \cdots + F_n \underset{déf}{=} \{(v_1 + \cdots + v_n) \in E \mid v_1 \in F_1, \cdots, v_n \in F_n\} \text{ est un sev de } E.$$

on l'appelle le **s.e.v somme de** $F_1, \cdots, F_n$.

Exemple : $F = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A\cos(x - \varphi),\ \text{avec } A, \varphi \in \mathbb{R} \text{ et } A \geqslant 0\right\}$
est un s.e.v somme de deux droites vectorielles de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Preuve : on montre que $F = \mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}(\{\cos, \sin\}) = \mathbb{R}\cos + \mathbb{R}\sin$ (voir fiche sur les nombres complexes).

Propriétés :

1) $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(\{v_1, v_2\}) = \mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2$.

1') $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(\{v_1, \cdots, v_n\}) = \mathbb{K}v_1 + \cdots + \mathbb{K}v_n$.

1") Plus généralement, pour toutes parties non vides $\mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_n$ de E on a

$$\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(\mathcal{P}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_n) = \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(\mathcal{P}_1) + \cdots + \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(\mathcal{P}_n)$$

2) On aurait pu prendre pour définition :

$$F_1 + \cdots + F_n = \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(F_1 \cup \cdots \cup F_n)$$

Attention l'opération $(F_1, F_2) \mapsto F_1 + F_2$ **n'est pas une addition** sur l'ensemble des s.e.v de E.
C'est tout de même une opération associative, commutative et admettant le s.e.v trivial $\{0_E\}$ comme élément neutre, mais on a par exemple pour tout s.e.v F de E : $F + F = F$, ou encore plus généralement :
Si F et G sont deux s.e.v de E avec $G \subset F$ alors $F + G = F$.

Sommes directes de deux ou plusieurs s.e.v de E

Une somme $F = F_1 + \cdots + F_n$ de s.e.v E est appelée somme directe de $F_1, \cdots, F_n$ si tout vecteur v de F **s'écrit d'une unique manière** sous la forme $v_1 + \cdots + v_n$ avec $v_1 \in F_1, \cdots, v_n \in F_n$.

On note alors cette propriété en écrivant $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Exemple : Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, le s.e.v $F = \mathbb{R}_4[X]$ vérifie :

$$F = \mathbb{R}_1[X] \oplus \mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}(\{X^2 + X^0, X^3 - X\}) \oplus \mathbb{R}\ (X^4 + 2X^3 + X^2 - X).$$

Preuve :
Soit $P = a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$ quelconque dans $\mathbb{R}_4[X]$,
on a $P = P_1 + P_2 + P_3$ avec $P_1 \in \mathbb{R}_1[X]$, $P_2 \in \mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}(\{X^2 + X^0, X^3 - X\})$ et $P_3 \in \mathbb{R}\ (X^4 + 2X^3 + X^2 - X)$ si et seulement s'il existe $b_0, b_1, \alpha, \beta, \gamma$ réels tels que
$P = (b_0X^0 + b_1X) + \big(\alpha(X^2 + X^0) + \beta(X^3 - X)\big) + \gamma(X^4 + 2X^3 + X^2 - X)$
ce qui, par identification, est équivalent à

$$(b_0, b_1, \alpha, \beta, \gamma) \text{ est solution du système } \left\{\begin{array}{ccccccc} b_0 & & +\alpha & & & = a_0 \\ & b_1 & & -\beta & -\gamma & = a_1 \\ & & \alpha & & +\gamma & = a_2 \\ & & & \beta & +2\gamma & = a_3 \\ & & & & \gamma & = a_4 \end{array}\right. .$$

Or ce système est échelonné compatible, de rang 5 à 5 inconnues, donc il admet une unique solution, ce qui prouve que P s'écrit bien de manière unique sous la forme $P = P_1 + P_2 + P_3$ avec $P_1 \in \mathbb{R}_1[X]$, $P_2 \in \mathcal{V}ect_{\mathbb{R}}(\{X^2 + X^0, X^3 - X\})$ et $P_3 \in \mathbb{R}\ (X^4 + 2X^3 + X^2 - X)$ comme attendu.

Paire de s.e.v supplémentaires dans E et les projections et symétries vectorielles associées

On dit que F et G forment une paire de s.e.v **supplémentaires dans** E si et seulement si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire si tout vecteur v de E se décompose en une somme $v_F + v_G$ pour un unique couple $(v_F, v_G) \in F \times G$.

Propriété : $E = F \oplus G \iff \left\{ \begin{array}{lcll} F + G & = & E & \textit{(traduit l'existence d'une telle décomposition)} \\ F \cap G & = & \{O_E\} & \textit{(assure l'unicité d'une telle décomposition)} \end{array} \right.$

Exemple : $F = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est paire} \right\}$ et $G = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est impaire} \right\}$ forment une paire de s.e.v supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Propriété fondamentale

Un s.e.v F de E admet toujours au moins un s.e.v G de E avec lequel il forme une paire de supplémentaires dans E.

Projections et symétries vectorielles associées à une paire de s.e.v supplémentaires dans E

A toute paire $\{F, G\}$ de s.e.v supplémentaires dans E on associe naturellement les quatre transformations de E définies de la manière suivante : tout $v \in E$ s'écrivant $v_F + v_G$ pour un unique couple $(v_F, v_G) \in F \times G$,

$\mathcal{P}_F^G$ appelée **projection vectorielle sur F dans la direction G** est définie par $\mathcal{P}_F^G(v) = v_F$,

$\mathcal{P}_G^F$ appelée projection vectorielle sur G dans la direction F est définie par $\mathcal{P}_G^F(v) = v_G$,

$\mathcal{S}_F^G$ appelée **symétrie vectorielle d'axe F dans la direction G** est définie par $\mathcal{S}_F^G(v) = v_F - v_G$,

$\mathcal{S}_G^F$ appelée symétrie vectorielle d'axe G dans la direction F est définie par $\mathcal{S}_G^F(v) = v_G - v_F$.

En prenant pour F et G deux droites vectorielles dans le plan usuel (elles passent donc par l'origine), non confondues (pour qu'elles soient supplémentaires) et en dessinant un vecteur quelconque et ses images par chacune de ces quatre transformations on comprend alors la terminologie de projection et de symétrie. Si vous avez du mal à voir au début, commencez par le faire avec deux droites perpendiculaires.

Les projections et symétries que vous avez rencontrées auparavant étaient sans doute ce qu'on appelle des projections et symétrie orthogonales (ou réflexions), elles sont des cas particuliers de projections et symétries vectorielles qui font appel à la notion d'orthogonalité, qui n'existe que pour une certaine classe d'espaces vectoriels : les espaces dits euclidiens comme $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \cdots \mathbb{R}^n$ ou d'autres (préhilbertiens) plus surprenants encore, comme vous le verrez l'an prochain.

Propriétés fonctionnelles des symétries et projections vectorielles

En notant pour simplifier $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ l'une quelconque des projections et l'une quelconque des symétries vectorielles que vous avez obtenues, vérifiez avec votre dessin qu'elles ont les propriétés suivantes :

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S} \circ \mathcal{S} = \mathcal{I}d_E$$

et démontrez-les en toute généralité à l'aide de leurs définitions. On dit pour parler de ces propriétés que $\mathcal{S}$ **est involutive** car elle est sa propre réciproque, et que $\mathcal{P}$ **est idempotente** car $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \circ \cdots \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$.

Il ne vous aura pas échappé que ces quatre transformations de E associées à une paire de s.e.v supplémentaires dans E sont intimement liées entre elles, écrivez les relations simples qu'elles vérifient, comme par exemple :

$$\mathcal{S}_G^F = -\mathcal{S}_F^G \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_F^G = 2\,\mathcal{P}_F^G - \mathcal{I}d_E.$$

Propriété de linéarité des projections et des symétries vectorielles

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$, l'une des deux projections et l'une des deux symétries, associées à une paire $\{F, G\}$ de s.e.v supplémentaires dans E, alors pour tous vecteurs $u, v \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\mathcal{P}(u + v) = \mathcal{P}(u) + \mathcal{P}(v) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}(\lambda u) = \lambda\,\mathcal{P}(u)$$

$$\mathcal{S}(u + v) = \mathcal{S}(u) + \mathcal{S}(v) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}(\lambda u) = \lambda\,\mathcal{S}(u)$$

On dit dans ce cas que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont **linéaires** dans le sens où ces deux propriétés font qu'elles transforment toute combinaison linéaire de vecteurs de E en la combinaison linéaire de leurs images avec les mêmes coefficients.

D) $\mathbb{K}$-ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \neq \{O_E\}$ est dit de dimension finie s'il est engendré par un nombre fini de ses éléments, autrement dit s'il existe un entier $n > 0$ et une famille $\mathcal{F} = \{e_1, \cdots, e_n\} \subset E$ telle que $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}) = E$.
On dit dans ce cas que $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** (sous-entendu de E).

Pour parler d'une famille génératrice d'un s.e.v F de E on dit " **génératrice de** F " , sans sous-entendu.

Propriétés des familles génératrices :

1) Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
2) Si un vecteur e_k d'une famille génératrice $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$ alors la sous-famille stricte $\mathcal{F} \setminus \{e_k\}$ est encore génératrice.
3) Une famille **génératrice** est dite **minimale** si toutes ses sous-familles strictes sont non génératrices.

Conséquence : Aucun des vecteurs d'une famille génératrice minimale n'est combinaison linéaire des autres :

$$\forall \mathcal{F} \text{ génératrice minimale, } \forall e_k \in \mathcal{F} \text{ , } e_k \notin \mathcal{V}\mathrm{ect}_{\mathbb{K}} \left(\mathcal{F} \setminus \{e_k\}\right)$$

Preuve par l'absurde : si on avait $e_k \in \mathcal{V}\mathrm{ect}_{\mathbb{K}} (\mathcal{F} \setminus \{e_k\})$, on en déduirait par le 2) que $\mathcal{F} \setminus \{e_k\}$ est génératrice ce qui manifestement faux d'après le 3) vu que $\mathcal{F}$ est génératrice minimale .

On résume cette conséquence en disant qu'une famille génératrice minimale est libre, avec la définition suivante :

Une famille est dite libre si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Une famille qui n'est pas libre est appelée une **famille liée**.

Propriétés des familles libres :

1) $\mathcal{F} = \{v_1, \cdots, v_p\}$ est libre $\Longleftrightarrow \forall\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \neq (0, \cdots, 0)$ on a $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \neq 0_E$

Une égalité $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E$ est appelée **relation** (de dépendance) **linéaire** entre les vecteurs $v_1, \cdots, v_p$.

La propriété 1) peut se résumer en disant qu'une famille est libre s'il n'existe entre ses vecteurs aucune relation linéaire autre que la **relation triviale** $0\ v_1 + \cdots + 0\ v_p = 0_E$, ce qu'on résume encore en disant que ses vecteurs sont **linéairement indépendants** (sous-entendu les uns des autres).

Dans la pratique, pour montrer qu'une famille $(v_1, \cdots, v_p)$ est libre, on montre donc que

$$\text{Si } \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0_E \text{ alors } (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) = (0, \cdots, 0)$$

2) Toute sous-famille d'une famille libre est une famille libre.
3) Si $\mathcal{F}$ est une famille libre et $v \notin \mathcal{V}\mathrm{ect}_{\mathbb{K}} (\mathcal{F})$ alors $\mathcal{F} \cup \{v\}$ est une famille libre.
4) $\mathcal{F} = \{v_1, \cdots, v_p\}$ est libre $\Longleftrightarrow \mathcal{V}\mathrm{ect}_{\mathbb{K}} (\mathcal{F}) = \mathbb{K}v_1 \ \oplus \cdots \oplus\ \mathbb{K}v_p$.
5) Une famille **libre** est dite **maximale** si toutes ses sur-familles sont liées.

Conséquence : Une famille libre maximale est génératrice.

Propriété fondamentale des familles de vecteurs :

Pour $\mathcal{F} = \{v_1, \cdots, v_r\} \subset E,$ et $\mathcal{G} = \{w_1, \cdots, w_s\} \subset \mathcal{V}\mathrm{ect}_{\mathbb{K}} (\mathcal{F})$ on a $s > r \Longrightarrow \mathcal{G}$ est liée.

Autrement dit : **r vecteurs donnés ne peuvent pas engendrer plus de r vecteurs indépendants**.
Attention : on n'a pas dit que si $s \leqslant r$ alors $\mathcal{G}$ est libre, ce qu'on peut dire par contre c'est que si $\mathcal{G}$ est libre alors $s \leqslant r$. (implication contraposée)
Preuve : on obtient au moins une relation non triviale en échelonnant les s vecteurs relativement aux r qui les engendrent (méthode de Gauss).

Propriété fondamentale des espaces vectoriels de dimension finie

Tout e.v $E \neq \{O_E\}$, de dimension finie, possède une famille génératrice libre.

Deux preuves importantes :

On peut en extraire une d'une famille génératrice (une famille réduite à un vecteur non nul est libre).
On peut compléter toute famille libre en une famille libre génératrice en piochant dans une famille génératrice.

Théorème-définition des bases d'un e.v $E \neq \{O_E\}$ de dimension finie :

Les affirmations suivantes pour une famille $\mathcal{F} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de vecteurs de E sont toutes équivalentes :

a) $\mathcal{F}$ est génératrice minimale.
b) $\mathcal{F}$ est libre maximale
c) $\mathcal{F}$ est génératrice et libre
d) $E = \mathbb{K}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}e_n$
e) $\forall v \in E, \exists (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ unique tel que $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$

On appelle **base de** E toute famille vérifiant l'une de (et donc toutes) ces affirmations.

Théorème d'existence : Tout e.v $E \neq \{O_E\}$ de dimension finie possède (au moins) une base.
Preuve : immédiate par la propriété fondamentale précédente.

Pour faciliter les énoncer futurs on prend la convention suivante :

Bien qu'il ne possède pas de base au sens ci-dessus, on dira que le s.e.v trivial $E = \{O_E\}$ est de dimension 0, et si besoin on lui affectera comme base la partie vide de E

Proposition-définition de la dimension d'un e.v de dimension finie

Si E est un e.v de dimension finie, **toutes ses bases ont le même nombre d'éléments**, on appelle ce nombre **la dimension de** E et on le note $dim(E)$.
Preuve : par double inégalité en utilisant la propriété fondamentale des familles de vecteurs puisque deux bases quelconques de E s'engendrent mutuellement.

Propriétés des dimensions d'e.v et s.e.v de dimension finie

E désignera ici un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, $\mathcal{B}$ une de ses bases, $\mathcal{F}$ une partie de E, et F, G... des s.e.v de E.

Remarques et propriétés élémentaires :

1) $\dim(F) = 0 \Longleftrightarrow F = \{O_E\}$.
2) $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
3) $\dim(F) = \dim(E) \Longleftrightarrow F = E$.
4) $\dim(F \cap G) \leqslant \min\{dim(F), dim(G)\} \leqslant dim(E)$.
5) $\dim(F + G) \leqslant \min\{\dim(E) , \dim(F) + \dim(G)\}$.
6) $\mathcal{F}$ est libre $\Longleftrightarrow \dim(\mathcal{V}ect(\mathcal{F})) = \text{Card}(\mathcal{F})$.
7) $\mathcal{F}$ est liée $\Longleftrightarrow \dim(\mathcal{V}ect(\mathcal{F})) < \text{Card}(\mathcal{F})$.
8) $\mathcal{F}$ est génératrice $\Longleftrightarrow \dim(\mathcal{V}ect(\mathcal{F})) = \dim(E)$.
9) $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice $\Longleftrightarrow \dim(\mathcal{V}ect(\mathcal{F})) < \dim(E)$.
10) $\mathcal{F}$ est une base de $E \Longleftrightarrow \dim(\mathcal{V}ect(\mathcal{F})) = \text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$.

Enoncés simplifiés en dimension finie : avec de plus $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases de F et G

1) $F + G = F \oplus G \Longleftrightarrow \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.
2) $\{F, G\}$ est une paire de supplémentaires dans $E \Longleftrightarrow \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
$\Longleftrightarrow \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E
$\Longleftrightarrow \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est libre.

Compléments :

1) *La relation de Grassmann* $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
2) *Bases canoniques* de certains espaces vectoriels classiques.
3) Bases et dimension infinie : Nous avons introduit la notion de base pour les e.v de dimension finie. Bien que de dimension infinie, certains espaces vectoriels comme $\mathbb{K}[X]$ par exemple, peuvent admettre une base (infinie) dans le sens suivant :

Une partie $\mathcal{P}$ d'un $\mathbb{K}$-ev E est dite base de E si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{P}$.

On peut remarquer dans ce cas que toute partie finie de $\mathcal{P}$ est alors une famille libre.
Exemple : $\left(X^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. On peut d'ailleurs même la qualifier de base canonique de $\mathbb{K}[X]$.