ALGEBRE 1 PC/SF-Physique

Fiche 5 : Calculs matriciels

A) Les espaces vectoriels de matrices $\mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$.

On peut combiner linéairement les matrices de même taille (p, n).

Une matrice $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$, de terme général $a_{i,j}$ situé $i^{ème}$ ligne $j^{ème}$ colonne, est notée $A = (a_{i,j})$.

On a vu au chapitre précédent que $\mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ a une structure naturelle de $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie $p \times n$.
Il admet comme base canonique la famille formée des $p \times n$ matrices $\Delta_{i,j}$ définies pour tous les couples
$(i, j) \in \{1, \cdots, p\} \times \{1, \cdots, n\}$ par $\Delta_{i,j}$ = la matrice de termes tous nuls sauf celui d'indice (i, j), égal à 1.
Pour former une base ordonnée avec ces $p \times n$ matrices, on peut convenir de les ordonner suivant les positions (i, j) parcourant successivement les p lignes de gauche à droite. Cette base est canonique car lorsqu'on a une matrice $A = (a_{i,j})$ sous les yeux, on peut immédiatement écrire sa décomposition dans cette base :

$$A = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \ \Delta_{i,j} \right)$$

Rang d'une matrice Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ a été défini comme étant le rang du système homogène qu'elle définit. On a vu qu'on peut aussi le caractériser comme le nombre maximum de lignes linéairement indépendantes qu'on peut extraire de A, autrement dit comme étant la dimension du s.e.v $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}\left(\{L_1(A), \cdots, L_p(A)\}\right)$ de $\mathcal{M}(1, n, \mathbb{K})$, engendré par les p lignes de A.

Rappel : le rang d'une matrice est **invariant par transformations de Gauss** sur les lignes, et le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de ses lignes non nulles.

Transposition On appelle matrice transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ la matrice ${}^tA \in \mathcal{M}(n, p, \mathbb{K})$ obtenue en écrivant en colonnes les lignes de A, ainsi pour $A = (a_{i,j})$ on a ${}^tA = (a_{j,i})$.

Propriétés :

1) La transposition est involutive : ${}^t({}^tA) = A$.
2) La transposition est linéaire : ${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha\ {}^tA + \beta\ {}^tB$.
3) Le rang est invariant par transposition : $\text{rang}({}^tA) = \text{rang}(A)$.

On peut donc aussi caractériser le rang de $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ comme le nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes qu'on peut extraire de A, autrement dit comme étant la dimension du s.e.v $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}\left(\{C_1(A), \cdots, C_n(A)\}\right)$ de $\mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K})$ engendré par les n vecteurs colonnes de A.

Le rang d'une matrice est donc invariant aussi par transformations de Gauss sur les colonnes.

Matrices symétriques, et matrices antisymétriques

Une matrice est dite **symétrique** si elle est **égale à sa transposée**, ${}^tA = A$.

Remarque : Les matrices symétriques sont carrées.

$$A = (a_{i,j}) \text{ carrée } (n, n) \text{ est symétrique} \iff \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}, \quad a_{j,i} = a_{i,j}$$

Les matrices symétriques (n, n) forment un s.e.v $\mathcal{S}(n, \mathbb{K})$ de dimension $\frac{n^2+n}{2}$ de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.

Une matrice est dite **antisymétrique** si elle est **opposée à sa transposée**, ${}^tA = -A$.

Remarque : Les matrices antisymétriques sont carrées, et leur diagonale est nulle.

$$A = (a_{i,j}) \text{ carrée } (n, n) \text{ est antisymétrique} \iff \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}, \quad a_{j,i} = -a_{i,j}$$

Les matrices antisymétriques (n, n) forment un s.e.v $\mathcal{A}(n, \mathbb{K})$ de dimension $\frac{n^2-n}{2}$ de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.

Propriété : $\mathcal{S}(n, \mathbb{K})$ et $\mathcal{A}(n, \mathbb{K})$ forment une paire de **s.e.v supplémentaires dans** $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.

Plus précisément, toute matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ se décompose de manière unique en $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$,
la première matrice de cette somme étant symétrique et la seconde antisymétrique.

B) Produit matriciel

Notation : Si k variables ordonnées $s_1, \cdots, s_k \in \mathbb{K}$ sont combinaisons linéaires de r variables ordonnées $t_1, \cdots, t_r \in \mathbb{K}$ alors il existe une unique matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}(k, r, \mathbb{K})$ telle que

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1}\ t_1 + & \cdots & +m_{1,r}\ t_r \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{k,1}\ t_1 + & \cdots & +m_{k,r}\ t_r \end{pmatrix}.$$

On résume cela par la **notation**

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{k,1} & \cdots & m_{k,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{pmatrix} \text{ ou plus brièvement } \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{pmatrix}.$$

Proposition-définition du produit matriciel

Si p variables $z_1, \cdots, z_p \in \mathbb{K}$ sont combinaisons linéaires de q variables $y_1, \cdots, y_q$ et que ces dernières sont elles-mêmes combinaisons linéaires de n variables $x_1, \cdots, x_n$ alors $z_1, \cdots, z_p$ sont combinaisons linéaires de $x_1, \cdots, x_n$ et il existe $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}(q, n, \mathbb{K})$, et $C \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ uniques telles que

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On a ainsi $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} = A \left(B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$

La matrice C est alors appelée la **matrice produit** de A et B et notée AB, dans cet ordre.

Premières propriétés du produit matriciel

1) Un produit de matrices $A_1 \cdots A_n$ n'est défini que si chaque matrice a autant de colonnes que la matrice située à sa droite a de lignes.
2) Le produit de matrices **est associatif**.
3) Le produit de matrices **n'est pas commutatif**.
4) La matrice produit $A_1 \cdots A_n$ a autant de lignes que la matrice de gauche A_1 et autant de colonnes que la matrice de droite A_n.

Calcul effectif du produit de deux matrices

Cas particulier : Ligne $\times$ Colonne : $(\alpha_1 \cdots \alpha_q) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \end{pmatrix} = (\alpha_1 \beta_1 + \cdots + \alpha_q \beta_q)$

Cas général : le terme général $c_{i,j}$ de la matrice $C = AB$ est donné par le produit Ligne $\times$ Colonne :

$$c_{i,j} = L_i(A) \times C_j(B)$$

Autres propriétés du produit matriciel

5) Il est **distributif à droite et à gauche** par rapport à l'addition des matrices :
$\forall A, B \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ et $\forall M, N, \in \mathcal{M}(q, n, \mathbb{K})$, on a $A(M+N) = AM + AN$ et $(A+B)M = AM + BM$.
6) Il **n'est pas intègre** : AB peut être nulle avec A et B non nulles.
7) Ce n'est une opération interne sur $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ que lorsque $p = q$.
8) La matrice carrée I_n (diagonale de 1) est **neutre** pour le produit dans $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.
9) Nous verrons que certaines matrices sont inversibles, d'autres pas.
10) La **transposée d'un produit** est le produit des transposées **dans l'ordre inverse** : ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$

Lectures des lignes et des colonnes d'un produit de matrices

Selon le contexte, on peut s'intéresser aux lignes $L_i(M)$ ou aux colonnes $C_j(M)$ d'une matrice M.
Pour une matrice produit AB on peut alors remarquer les propriétés calculatoires suivantes :

Lignes du produit AB : $\quad L_i(AB) = L_i(A) \times B$
Cette égalité met en évidence le fait que chaque ligne de AB est une combinaison linéaire des lignes de B.

Colonnes du produit AB : $\quad C_j(AB) = A \times C_j(B)$
Cette égalité met en évidence le fait que chaque colonne de AB est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Conséquence sur le rang d'un produit
Des deux propriétés précédentes découle le fait que $\quad \text{rang}(AB) \leqslant \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$

C) Inversibilité et Matrices inversibles.

Les matrices neutres I_k

La non commutativité du produit conduit à se demander quelles sont les matrices neutres à droites et celles neutres à gauche pour le produit des matrices. Par exemple, une matrice N est dite neutre pour le produit à gauche de $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ si $\forall A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ on a $NA = A$.
De cette égalité découle immédiatement le fait qu'une telle matrice N est nécessairement carrée (p,p).
En prenant alors successivement pour A les matrices $\Delta_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ on voit que la seule matrice N répondant au problème est la matrice I_p, diagonale avec ses p termes diagonaux égaux à 1.
De manière analogue, la seule matrice neutre pour le produit à droite de $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ est la matrice I_q.

Le problème de l'inversibilité d'une matrice

De la même manière, la non commutativité du produit des matrices conduit pour une matrice $A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ aux notions d'inversibilité à droite et d'inversibilité à gauche .
On ne traitera pas cette question en détail mais voici les principaux résultats auxquels nous arriverions et que vous pouvez explorer en exercice sur des exemples particuliers de petites tailles :

1) Une matrice $A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ admet une inverse A' à gauche ($A'A = I_q$) si elle est de rang (maximum) égal au nombre q de ses colonnes, ce qui n'est possible que si $q \leqslant p$.
2) Une matrice $A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ admet une inverse A'' à droite ($AA'' = I_p$) si elle est de rang (maximum) égal au nombre p de ses lignes, ce qui n'est possible que si $p \leqslant q$.
3) Une matrice non carrée ne peut donc pas être inversible à la fois à droite et à gauche.
4) Une matrice non carrée, inversible à droite (ou bien à gauche) n'admet pas une unique matrice inverse à droite (ou bien à gauche).

Les matrices inversibles

Définition On appelle **matrice inversible** une matrice qui est inversible à droite et à gauche.

Remarque : Seule une matrice carrée peut être inversible.

Propriété : Si une matrice carrée A de taille p est inversible à droite ou à gauche alors elle est inversible, et de plus elle admet une unique matrice inverse notée A^{-1} qui est aussi bien son inverse à droite qu'à gauche :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_p$$

Dans la pratique, pour déterminer la matrice inverse d'une matrice inversible il suffira donc de trouver une inverse à droite ou à gauche.

Premier exemple important : On appelle **matrice élémentaire** associée à une transformation élémentaire de Gauss, la matrice obtenue en appliquant cette transformation à la matrice unité I_p.
Une matrice élémentaire est inversible et sa matrice inverse est une matrice élémentaire.
Preuve en exercice

Second exemple important : **Inversion par relation polynomiale**.

Si une matrice A vérifie une relation polynômiale de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = 0$ avec $\alpha_0 \neq 0$, on peut alors en déduire que A est inversible et calculer son inverse sous la forme d'une matrice polynomiale en A.

Plus précisément on a $A^{-1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\alpha_0} A^{k-1}$ (Inutile d'apprendre par coeur ! C'est l'idée qui compte.)

Illustration : Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}(p,\mathbb{K})$.
Si $\quad 3A^4 - A^3 + 5A^2 - 7A^1 + 2A^0 = 0$
alors $\quad 3A^4 - A^3 + 5A^2 - 7A^1 = -2I_p$
par conséquent $\quad -\frac{3}{2}A^4 + \frac{1}{2}A^3 - \frac{5}{2}A^2 + \frac{7}{2}A^1 = I_p$
et en factorisant le membre de gauche par A, on obtient
$\left(-\frac{3}{2}A^3 + \frac{1}{2}A^2 - \frac{5}{2}A^1 + \frac{7}{2}I_p\right) A = I_p$ (**Attention** : ne pas oublier ici que le neutre est I_p et non pas 1)
ce qui met en évidence que A est inversible et d'inverse $\quad A^{-1} = -\frac{3}{2}A^3 + \frac{1}{2}A^2 - \frac{5}{2}A + \frac{7}{2}I_p$

Matrice carrée inversible et résolution du système linéaire général de matrice A

Proposition : Une matrice A carrée de taille p, est inversible si et seulement si le **système linéaire général de matrice A**, codé matriciellement $AX = Y$, **admet une unique solution**.

Dans ce cas cette unique solution est alors donnée par $X = A^{-1}Y$, et met ainsi en évidence la matrice A^{-1}.

Première conséquence : $A \in \mathcal{M}(p,\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si elle est de rang p.

Deuxième conséquence : Si A est inversible, on peut calculer A^{-1} par algorithme de Gauss sur les lignes de la bimatrice $(A|I)$.
En effet la résolution du système général $AX = Y$ peut être codé par une suite finie de transformations élémentaires de Gauss sur les lignes de la bimatrice : $(A|I) \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow (I|A^{-1})$.

Troisième conséquence : Si A est inversible, on peut décomposer A^{-1} en un produit de matrices élémentaires de Gauss. Pour cela on utilise le fait qu'**une transformation élémentaire sur les lignes de A se traduit par la multiplication à gauche de A par la matrice élémentaire de Gauss associée**, la résolution du système général par algorithme de Gauss donne alors

$$(A|I) \Longleftrightarrow (E_1A|E_1I) \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow (E_k \cdots E_1A|E_k \cdots E_1I) = (I|A^{-1})$$

ce qui met en évidence le fait que $A^{-1} = E_k \cdots E_1$.

Produit inversible : Un produit $A_1 \cdots A_n$ de matrices inversibles est inversible, et son inverse est

le produit des inverses dans l'ordre inverse : $(A_1 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_1^{-1}$

Conséquence : Toute matrice inversible A peut se décomposer en un produit de matrices élémentaires.
Il suffit pour cela d'inverser la décomposition précédente $E_k \cdots E_1$ de A^{-1} , on obtient alors
$A = (E_k \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$, et on a vu que l'inverse E_j^{-1} de toute matrice élémentaire E_j est elle-même une matrice élémentaire.

Remarque : Une transformation élémentaire sur les colonnes de A se traduit par la multiplication à droite de A par la matrice élémentaire de Gauss associée.

Invariance du rang : Si A est une matrice inversible, de taille p, alors

$$\forall M \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K}) \text{ et } \forall N \in \mathcal{M}(n, p, \mathbb{K}),$$
$$\text{rang}(AM) = \text{rang}(M) \text{ et } \text{rang}(NA) = \text{rang}(N).$$

Pour le justifier, il suffit de décomposer A en un produit de matrice élémentaires, et voir ainsi le produit AM (ou NA) comme le résultat d'une succession de transformations élémentaires de Gauss sur les lignes (ou sur les colonnes) de A, qui, on le sait, laissent le rang invariant.

Inverse et transposition : Si A est une matrice inversible alors ${}^tA$ l'est aussi et

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$

D) Déterminant d'une matrice carrée

Pour avoir une idée de l'importance de la notion de déterminant vous pouvez commencer par regarder rapidement *la table des matières* de la page dédiée à cette notion sur wikipedia, et parcourir certains passages que vous trouverez lisibles, en particulier le déterminant de 2 vecteurs du plan et celui de 3 vecteurs de l'espace et leur interprétation en termes d'aire d'un parallélogramme et de volume d'un parallélépipède.
Pour certains autres passages, il vous faudra mûrir encore quelques mois pour les aborder.

Pour définir rigoureusement la fonction déterminant sur $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$, on montrerait que les fonctions de $(\mathbb{K}^p)^p$ dans $\mathbb{K}$ qui sont linéaires par rapport à chacune de ses p variables vectorielles, et qui s'annulent lorsque deux quelconques de ces p vecteurs variables prennent des valeurs égales, forment une droite vectorielle dans l'e.v des fonctions de $(\mathbb{K}^p)^p$ dans $\mathbb{K}$ (formes $p-$linéaires alternées sur $(\mathbb{K}^p)^p$).

La fonction déterminant est alors rigoureusement définie comme étant la seule de ces fonctions qui prend la valeur 1 sur le p-uplet $(e_1, \cdots, e_p)$ des p vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Notre but ici est de **savoir calculer un déterminant** et d'**en connaitre les propriétés essentielles**, aussi nous ne nous pencherons pas sur cette définition rigoureuse ni sur la *formule générale* de *Leibniz* faisant appel à la signature d'une permutation (étude du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de n éléments).

Propriétés caractéristiques du déterminant et boite à outils

Avant toute chose, le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ est un élément de $\mathbb{K}$.

Ce scalaire, noté $\det(A)$ ou $|A|$, s'appelle aussi le déterminant des p "vecteurs colonnes" de A ou encore celui des p "vecteurs lignes" de A.

Pour le calculer on peut utiliser les quatre propriétés suivantes qu'il vérifie et qui le caractérisent complètement :

1) $\det(I_p) = 1$.

2) Si on échange deux lignes de A, son déterminant change de signe.

3) Une transformation sur une ligne de A du type $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplie le déterminant par λ.

4) Une transformation sur une ligne de A du type $L_i \leftarrow L_i + \mu L_k$, avec $k \neq i$, n'affecte pas le déterminant.

Conséquences immédiates

5) Si deux lignes de A sont égales $\det(A) = 0$.

6) Si une ligne de A est nulle $\det(A) = 0$.

7) Si A est une matrice diagonale $\det(A)$ est le produit de ses termes diagonaux.

8) Si A est une matrice triangulaire $\det(A)$ est le produit de ses termes diagonaux.

Outils supplémentaires

Les propriétés suivantes sont autant d'outils supplémentaires pour le calcul d'un déterminant.

Déterminant et transposition : $\det({}^t\!A) = \det(A)$ *(Preuve à l'aide la formule de Leibniz)*

Cette propriété permet de voir indifféremment le déterminant d'une matrice comme étant celui de ses "vecteurs lignes" ou celui de ses "vecteurs colonnes".

Conséquence : Les propriétés **2)** à **6)** précédentes sont vraies aussi en remplaçant "lignes" par "colonnes".

Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne : *Formules de Laplace*

Elles ramènent le calcul d'un déterminant $p \times p$ à celui d'au plus p déterminants $(p-1) \times (p-1)$.
Elle sont utiles en pratique quand une ligne ou une colonne possède beaucoup de coefficients nuls.

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$, notons $A_{\widehat{i,j}} \in \mathcal{M}(p-1, \mathbb{K})$ la matrice obtenue en rayant la ligne i et la colonne j de la matrice A, on a alors :

La formule de développement de Laplace par rapport à la $i^{ème}$ ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{\widehat{i,j}}\right)$$

Elle est utile en pratique quand la i-ème ligne possède beaucoup de coefficients nuls.
(preuve par linéarité du déterminant par rapport au i-ème vecteur ligne, et changements de signe par échanges de deux lignes ou de deux colonnes).

La formule de développement de Laplace par rapport à la $j^{ème}$ colonne

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{\widehat{i,j}}\right)$$

Elle est utile en pratique quand la j-ème colonne possède beaucoup de coefficients nuls.

Le scalaire $(-1)^{i+j} \det\left(A_{\widehat{i,j}}\right)$ est appelé le **cofacteur** de $a_{i,j}$

Autres propriétés du déterminant ou liées au déterminant

P_1 : $\forall A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ on a : $\det(A) \neq 0 \iff \text{rang}(A) = p \iff A$ est inversible.

P_1' : $\forall A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ on a : $\det(A) = 0 \iff \text{rang}(A) < p \iff A$ n'est pas inversible.

P_2 : Déterminant d'un produit $\det(A_1 \cdots A_n) = \det(A_1) \cdots \det(A_n)$.

P_2' : Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

P_3 : **Le déterminant d'une somme n'est en général pas égal à la somme des déterminants**.

P_4 : Le rang d'une matrice $M \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ est égal à la taille d'un plus grand déterminant mineur non nul qu'on puisse extraire de M.

Déterminant de p vecteurs d'un e.v E de dimension p dans une base $\mathcal{B}$ donnée.

Soit $A = (C_1 \cdots C_p)$ la matrice formée des p colonnes de coordonnées dans $\mathcal{B}$ de p vecteurs $v_1, \cdots, v_p$ de E. On appelle alors déterminant de $(v_1, \cdots, v_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ le déterminant de cette matrice A, et on le note $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_p)$.

Dans ce cas : $(v_1, \cdots, v_p)$ est une base de $E \iff \det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_p) \neq 0$

Et de plus, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on dit que $(v_1, \cdots, v_p)$ est une base de E de **même orientation** que $\mathcal{B}$ si $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_p) > 0$ et d'**orientation opposée** à celle de $\mathcal{B}$ si $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_p) < 0$.

Deux lectures courtes conseillées sur le thème du déterminant :

Systèmes et formules de Cramer

Déterminant de Vandermonde

E) <u>Trace d'une matrice carrée</u>

<u>Définition</u> :

Pour une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}(p,\mathbb{K})$ on appelle trace de A **la somme de ses termes diagonaux** :

$$\operatorname{tr}(A) \underset{d\acute{e}f}{=} \sum_{i=1}^{p} a_{i,i}$$

<u>Propriétés de la trace</u> :

La trace est **linéaire** : $\forall A, B \in \mathcal{M}(p,\mathbb{K})$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$$

La trace est **invariante par transposition** : $\qquad \operatorname{tr}\left({}^{t}\!A\right) = \operatorname{tr}(A)$

Propriété de la trace face au produit matriciel :

$\forall M \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ et $\forall N \in \mathcal{M}(q,p,\mathbb{K})$ on a : $MN \in \mathcal{M}(p,\mathbb{K})$, $NM \in \mathcal{M}(q,\mathbb{K})$, et

$$\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM).$$

<u>Conséquence particulière</u> : $\forall A, P \in \mathcal{M}(p,\mathbb{K})$ avec P inversible, $\quad \operatorname{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \operatorname{tr}(A)$

Les matrices de la forme $P^{-1}AP$ sont dites semblables à A, elles sont toutes semblables entre elles et la propriété ci-dessus montre que **la trace est un invariant des matrices semblables**, ce qui nous permettra un peu plus loin de définir la notion de trace pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.