ALGEBRE 1 PC/SF-Physique

Fiche 6 : BASES ET COORDONNÉES DANS UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE

$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou plus généralement un corps commutatif, et E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie égale à $n \geqslant 1$.

A) Coordonnées d'un vecteur dans une base de E

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
Pour tout vecteur $v \in E$, il existe alors une unique matrice colonne $X_v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n, 1, \mathbb{K})$ telle que

$v = x_1\ e_1 + \cdots + x_n\ e_n$, on l'appelle **la colonne de coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.**

Le $i^{\text{ème}}$ coefficient, x_i, de X_v est appelé $i^{\text{ème}}$ coordonnée de v dans $\mathcal{B}$, ou encore composante de v selon e_i.

Par exemple, $X_{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, tandis que $X_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ... , et $X_{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n, 1, \mathbb{K})$ définit un unique vecteur $v \in E$ tel que $X_v = X$, le vecteur $v = \lambda_1\ e_1 + \cdots + \lambda_n\ e_n$.

Propriété de linéarité des coordonnées
Pour tous vecteurs $u, v \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\qquad X_{u+v} = X_u + X_v \quad$ et $\quad X_{\lambda v} = \lambda X_v$.

Remarque : Toute égalité entre combinaisons linéaires de vecteurs de E est alors équivalente à une égalité entre les combinaisons linéaires correspondantes des colonnes de coordonnées dans $\mathcal{B}$ de ces vecteurs.

Par exemple, si pour $u, v, w \in E$ on a $4X_w = 3X_u - 2X_v$ on en déduit que $4w = 3u - 2v$ et inversement si on a $5u + 6w = -4u + 3v$ on en déduit que $5X_u + 6X_w = -4X_u + 3X_v$.

B) Changement de base - changement de coordonnées

Dans cette partie nous allons voir que les colonnes de coordonnées d'un même vecteur $v \in E$, dans deux bases de E différentes, sont liées entre elles par une relation matricielle, appelée formule de changement de base, ou encore formule de changement de coordonnées .

On considère donc deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ de E, et pour tout vecteur $v \in E$ on note X_v sa colonne de coordonnées dans $\mathcal{B}$ et X'_v sa colonne de coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

Proposition-définition : Il existe une matrice carrée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, unique, telle que pour tout $v \in E$

$$X_v = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\ X'_v$$

Elle est appelée **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Attention ! Cette appellation est trompeuse car cette matrice ne permet pas de passer de la colonne de coordonnées X_v de v dans $\mathcal{B}$ à sa colonne de coordonnées X'_v dans $\mathcal{B}'$ mais précisément l'inverse, comme le montre la formule ci-dessus qualifiée de **formule de changement de base**.

Identification de la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$:

La formule de changement de base $X_v = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\ X'_v$ vérifiée par tout vecteur $v \in E$ l'est en particulier pour chacun des n vecteurs de $\mathcal{B}'$. On remarque alors que pour chaque e'_j l'égalité $X_{e'_j} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\ X'_{e'_j}$ s'écrit de façon plus précise $X_{e'_j} = C_j(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})$.
On voit ainsi que la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est formée des n colonnes de coordonnées dans $\mathcal{B}$ des n vecteurs de $\mathcal{B}'$, raison pour laquelle elle est souvent notée aussi $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Conséquence : La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse n'est autre que la matrice $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
Dans la pratique cela se traduit par $\qquad X'_v = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}\, X_v = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\ X_v$.

C) Mise en garde sur les abus de langage et de notations dans $\mathbb{K}^n$

Voici un énoncé simple qu'on trouverait dans bien des ouvrages :

"Les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, *et* $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, *sont-ils linéairement indépendants dans* $\mathbb{R}^3$ *?"*

Dans cet énoncé les vecteurs $v_i \in \mathbb{R}^3$ sont identifiés à leurs colonnes de coordonnées X_{v_i} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, à un point tel, qu'après quelques énoncés rédigés de la sorte, bon nombre d'étudiants débutants les confondent totalement, et ne savent plus à quelle branche se raccrocher le jour où ils doivent travailler avec une base de $\mathbb{K}^n$ qui n'est pas canonique.

On pourrait se dire que tous les calculs peuvent être faits dans la base canonique, ce qui n'est théoriquement pas faux, mais il s'avère souvent bien plus pratique, pour simplifier la résolution de certains problèmes, de mener les calculs correspondants dans une autre base, bien plus adaptée au problème, comme nous le verrons par exemple dans le dernier chapitre, et plus encore dans les années à venir.

Nous garderons donc à l'esprit qu'un vecteur de $\mathbb{K}^n$ s'écrit $(x_1, \cdots, x_n)$ tandis que $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ désigne une matrice colonne, autrement dit un vecteur de $\mathcal{M}(n, 1, \mathbb{K})$.

Ainsi, même s'il est un cas où les confondre ne conduirait pas à de sérieuses erreurs, il n'en reste pas moins vrai que dans les autres cas cela pourrait conduire à des résultats totalement faux, voire insensés.