ALGEBRE 1 PC/SF-Physique

Fiche 7 : Applications linéaires et changements de bases en dimension finie

$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou plus généralement un corps commutatif, et E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

A) Applications linéaires de E dans F

Une application f de E dans F est dite **linéaire** si : $\forall u, v \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a $\begin{cases} f(u+v) &= f(u)+f(v) \\ f(\lambda u) &= \lambda f(u) \end{cases}$

Remarques :
Une application f de E dans F est linéaire si l'image d'une combinaison linéaire $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k$ quelconque de vecteurs de E est égale à la combinaison linéaire $\lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_k f(u_k)$ des images de ces vecteurs par f.

L'application nulle, qui à tout vecteur de E associe le vecteur nul 0_F de F, est linéaire.

Notation : L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.

Propriété : Toute combinaison linéaire $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_q f_q$ d'applications linéaires $f_1, \cdots, f_q$ de E dans F est une application linéaire de E dans F.
Autrement dit : L'ensemble (non vide) $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est stable par combinaisons linéaires, il a donc une structure de sous-espace vectoriel de l'e.v F^E de toutes les applications de E dans F.

Composée d'applications linéaires

E, F, G désignant des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

Isomorphismes

Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ qui est bijective est appelée un **isomorphisme** de E sur F.
Sa bijection réciproque f^{-1} est alors une application linéaire de F dans E et donc un isomorphisme de F sur E.
S'il existe un isomorphisme de E sur F on dit que E et F sont **isomorphes**.
Un isomorphisme permet de ramener, pour en faciliter la résolution, tout problème linéaire posé dans E en un problème linéaire posé dans F ; par exemple, aussi compliqués que puissent être les vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v E de dimension finie n, le choix d'une base de E définit un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^n$ et permet ainsi de ramener la résolution d'un problème linéaire posé dans E en un problème linéaire posé dans $\mathbb{K}^n$.

B) Noyau, image, et rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$

L'ensemble $Ker(f) \underset{déf}{=} \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$ est appelé le **noyau de** f.

$0_E \in Ker(f)$ et on vérifie aisément que $Ker(f)$ est stable par combinaisons linéaires, c'est **un s.e.v de** E.

L'ensemble $Im(f) \underset{déf}{=} f(E) = \{v \in F \mid \exists u \in E \text{ tel que } v = f(u)\}$ est appelé l'**image de** f.

$0_F \in Im(f)$ et on vérifie aisément que $Im(f)$ est stable par combinaisons linéaires, c'est **un s.e.v de** F.

Remarque : Si E est de dimension finie n et $\mathcal{B}_E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base quelconque de E alors $Im(f)$ est de dimension finie (même si F ne l'est pas) car il est facile de vérifier que $\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$ en est une famille génératrice.

Noyau et injectivité

On rappelle que pour deux ensembles A et B, une application $f \in B^A$ est dite injective si

$$\forall u, v \in A,\ u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$$

Propriétés :

$f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective $\iff Ker(f) = \{0_E\}$.

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective alors elle transforme toute famille libre de k vecteurs de E en une famille libre de k vecteurs de F.

Image et surjectivité

On rappelle que pour deux ensembles A et B, une application $f \in B^A$ est dite surjective si

$$\forall b \in B,\ \exists a \in A \text{ tel que } b = f(a)$$

Propriétés :

Par définition même de $Im(f)$ on a : $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est surjective $\iff Im(f) = F$.

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est surjective alors elle transforme toute famille génératrice de E en une famille génératrice de F.

Propriétés des isomorphismes en dimension finie

Si E et F sont de dimensions finies et $\mathcal{B}_E$ est une base de E, alors $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme entre E et F si f réalise une bijection entre $\mathcal{B}_E$ et une base de F.

Si f est un isomorphisme entre E et F de dimensions finies alors E et F ont la même dimension, et de plus f transforme alors bijectivement toute base de E en une base de F.

Tous les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de mêmes dimensions finies n sont isomorphes, ils sont tous isomorphes à $\mathbb{K}^n$.

Théorème "Noyau-Image" : Si E **est de dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors

$$Ker(f) \text{ et } Im(f) \text{ sont de dimensions finies}$$
$$\text{et}$$
$$dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(E).$$

Preuve :
Notons $n = dim(E)$.
Même dans le cas où F n'est pas de dimension finie, $Ker(f)$ est un s.e.v de E donc $dim(Ker(f)) \leqslant dim(E)$ est finie.
$Im(f)$ qui est engendré par les images $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ des vecteurs d'une quelconque base $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ de E est de donc dimension $dim(Im(f)) \leqslant n$, finie elle aussi.

Notons $k = dim(Ker(f))$ et $r = dim(Im(f))$, il s'agit maintenant de montrer que $k + r = n$.
Pour cela il suffit de voir qu'on peut construire une base de E formée de $k + r$ vecteurs.

Soit $(u_1, \ldots, u_k)$ une base de $Ker(f)$ et $(v_1, \ldots, v_r)$ une base de $Im(f)$.
Pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$ le vecteur $v_j \in Im(f)$ donc il existe au moins un vecteur $u'_j \in E$ tel que $f(u'_j) = v_j$.
Montrons que $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_k, u'_1, \ldots, u'_r)$ est alors une base de E :

1) $\mathcal{B}$ est une famille libre : Supposons $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et $\mu_1, \ldots, \mu_r$ dans $\mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \ + \ \sum_{j=1}^{r} \mu_j u'_j = 0_E$,
montrons qu'alors tous les coefficients λ_i et tous les coefficients μ_j sont nuls.
Notons $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$ et $u' = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \mu_j u'_j$. On a donc supposé $u + u' = 0_E$, par conséquent on a par linéarité $f(u+u') = 0_F$ et ainsi $f(u + u') = f(u) + f(u') = 0_F$. Comme $u \in Ker(f)$ on en déduit que $f(u') = 0_F$.
Or $f(u') = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \mu_j f(u'_j) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j v_j$ donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \mu_j v_j = 0_F$ et comme les v_j forment une famille libre on en déduit que tous les coefficients μ_j sont nuls et par suite que $u' = 0_E$.
L'hypothèse $u + u' = 0_E$ se résume donc à $u = 0_E$ et la liberté de la famille $(u_1, \ldots, u_k)$ permet alors d'établir aussi la nullité de tous les coefficients λ_j.

2) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice : Soit v un vecteur quelconque de E.
Comme $f(v) \in Im(f)$, il est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_r$ et il existe alors $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{K}$ tels que
$f(v) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \beta_j v_j = \sum_{j=1}^{r} \beta_j f(u'_j)$. On en déduit par linéarité que $f(v) = f\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \beta_j u'_j\right)$ puis que $f\left(v - \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \beta_j u'_j\right) = 0_F$.
Ainsi on a $\left(v - \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \beta_j u'_j\right) \in Ker(f)$ et il existe donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tels que $\left(v - \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \beta_j u'_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$
et par conséquent $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j u'_j$, ce qui prouve bien que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice.
Fin de preuve.

Avec la notion de **rang d'une application linéaire** : $rang(f) \underset{déf}{=} dim(Im(f))$, ce théorème est aussi énoncé sous l'appellation

Théorème du rang : Si E est de dimension finie alors $\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a $dim(Ker(f))$ et $rang(f)$ finis et

$$rang(f) = dim(E) - dim(ker(f))$$

Corollaire : Si E et F sont **de dimensions finies égales** alors toute application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ injective ou surjective est un isomorphisme entre E et F.

C) Matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases

Propriété : Si E et F de dimensions finies sont munis de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ alors :
une application f de E dans F est linéaire si et seulement si chacune des coordonnées (dans $\mathcal{B}_F$) de l'image $f(u)$ de tout vecteur u de E est une combinaison linéaire des coordonnées (dans $\mathcal{B}_E$) de u, à coefficients indépendants de u.

Plus explicitement : Si $dim(E) = n$ et $dim(F) = p$ et qu'on note respectivement
X_u la colonne des n coordonnées dans la base $\mathcal{B}_E$ d'un vecteur quelconque $u \in E$,
Y_v la colonne des p coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$ d'un vecteur quelconque $v \in F$,

alors pour toute $f \in F^E$ on a $\quad f \in \mathcal{L}(E, F) \iff \exists M \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{R})$ telle que $\forall u \in E, \quad Y_{f(u)} = MX_u$

Dans ce cas, cette matrice M est unique, on l'appelle **matrice de f relative au couple de bases** $(\mathcal{B}_E\ ,\ \mathcal{B}_F)$ et on la note

$$M = Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$$

Lecture-écriture de la matrice $M = Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$

Lecture-écriture par lignes :
L'égalité matricielle $Y_{f(u)} = MX_u$, valable pour tous les vecteurs $u \in E$, montre que pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, la i-ème coordonnée de $f(u)$ dans $\mathcal{B}_F$ est égale au produit matriciel de la i-ème ligne de M par la colonne X_u des coordonnées de u dans $\mathcal{B}_E$.
En d'autres termes :

Pour tout $u \in E$, en notant respectivement $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := X_u$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} := Y_{f(u)}$ les colonnes de coordonnées

de u dans $\mathcal{B}_E$, et de $f(u)$ dans $\mathcal{B}_F$, et avec $m_{i,j}$ le terme général de M, on a alors

$$\forall i \in \{1, \cdots, p\} \qquad y_i = L_i(M) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = m_{i,1}\ x_1 + m_{i,2}\ x_2 + \cdots + m_{i,n}\ x_n\ ,$$

ce qu'on peut schématiser ainsi :

$$M = Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \left(\begin{array}{ccccc} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & \cdots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline m_{i,1} & m_{i,2} & \cdots & \cdots & m_{i,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{p,1} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{p,n} \end{array}\right) \qquad \longleftrightarrow \qquad y_i = m_{i,1}\ x_1 + m_{i,2}\ x_2 + \cdots + m_{i,n}\ x_n$$

Lecture-écriture par colonnes :
En utilisant le fait que la colonne de coordonnées X_{e_j} du j-ème vecteur de la base $\mathcal{B}_E$ est la colonne constituée de n coefficients nuls à l'exception du j-ème qui vaut 1, on voit que $Y_{f(e_j)} = M\ X_{e_j} = C_j(M)$, la j-ème colonne de M, ce qu'on peut schématiser ainsi :

$$\begin{array}{c} \\ \\ M = Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & Y_{f(e_j)} & & \\ & & & \| & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c|cc} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & \vdots & \vdots & m_{2,j} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{p,1} & m_{p,2} & \cdots & m_{p,j} & \cdots & m_{p,n} \end{array}\right) \end{array}$$

On peut donc voir M comme étant la matrice $M_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ formée des colonnes de coordonnées des vecteurs $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Illustrations sur un premier exemple

On considère ici les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$, munis de leurs bases canoniques respectives, et l'application $f \in F^E$ définie par

$$f((x,y,z)) = (x+y)\ X^0 + (x-z)\ X^1 - (y+z)\ X^2$$

On vérifie que $f \in \mathcal{L}(E,F)$, c'est-à dire que f est une **application linéaire** de E dans F en justifiant que :
$\forall u = (x,y,z) \in E$ et $\forall v = (x',y',z') \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f((x+x', y+y', z+z')) \\ &= (x+x'+y+y')\ X^0 + (x+x'-z-z')\ X^1 - (y+y'+z+z')\ X^2 \\ &= \underbrace{(x+y)\ X^0 + (x-z)\ X^1 - (y+z)\ X^2}_{f(u)} + \underbrace{(x'+y')\ X^0 + (x'-z')\ X^1 - (y'+z')\ X^2}_{f(v)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) \\ &= (\lambda x + \lambda y)\ X^0 + (\lambda x - \lambda z)\ X^1 - (\lambda y + \lambda z)\ X^2 \\ &= \lambda\ \underbrace{\left(\ (x+y)\ X^0 + (x-z)\ X^1 - (y+z)\ X^2\ \right)}_{f(u)} \end{aligned}$$

Le noyau de f :

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{(x,y,z) \in E \mid f(\ (x,y,z)\ ) = 0_F\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y)\ X^0 + (x-z)\ X^1 - (y+z)\ X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\} \end{aligned}$$

Il est donc caractérisé dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par le système $S = \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x \quad -z & = & 0 \\ -y-z & = & 0 \end{array} \right.$.

En résolvant ce dernier on voit alors que $Ker(f) = Vect(\ (1,-1,1)\ )$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $v = (1,-1,1)$.

L'image de f :

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{v \in F \mid \exists\ u \in E \text{ tel que } v = f(u)\} \\ &= \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \exists\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } P = (x+y)\ X^0 + (x-z)\ X^1 - (y+z)\ X^2\right\}. \end{aligned}$$

Engendrée par les images $f((1,0,0)), f((0,1,0))$, et $f((0,0,1))$ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, il apparait alors que $Im(f) = Vect(X^0 + X^1\ ,\ X^0 - X^2\ ,\ -X^1 - X^2)$.

Cette famille ($f((1,0,0)), f((0,1,0), f((0,0,1))$) n'est pas libre car on a par exemple la relation non triviale $f((1,0,0)) - f((0,1,0)) + f((0,0,1)) = 0_F$.

On en déduit que $Im(f)$ est le plan vectoriel $Vect(X^0 + X^1\ ,\ -X^1 - X^2)$ de F.

On peut en chercher un système d'équations dans la base canonique (X^0, X^1, X^2) de F :
un vecteur P de F est dans $Im(f)$ si et seulement si $Vect(X^0 + X^1\ ,\ -X^1 - X^2\ ,\ P) = Vect(X^0 + X^1\ ,\ -X^1 - X^2)$ ce qui est équivalent à $rang(X^0 + X^1\ ,\ -X^1 - X^2\ ,\ P) = 2$ et se traduit, pour $P = a_0 X^0 + a_1 X^1 + a_2 X^2$, par le fait que $rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_0 \\ 1 & -1 & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{pmatrix} = 2$.

Comme les transformations de Gauss $(C_3 \leftarrow C_3 - a_0\ C_1)$ puis $(C_3 \leftarrow C_3 + (a_1 - a_0)\ C_2)$ n'affectent pas le rang, on a alors $rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_0 \\ 1 & -1 & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & a_1 - a_0 \\ 0 & -1 & a_2 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a_0 - a_1 + a_2 \end{pmatrix}$ égal à 2 si et seulement si $\{\ a_0 - a_1 + a_2 = 0$ qui est alors un système d'équations de $Im(f)$ dans la base canonique (X^0, X^1, X^2) de F.

Matrice de f dans les bases canoniques de E et F :

Pour tout $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, sa colonne de coordonnées dans la base canonique de E est $X_v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et la colonne de coordonnées de son image $f(v)$ dans la base canonique de F est $Y_{f(v)} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-z \\ -y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

La matrice de f dans les bases canoniques de E et F est donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Illustrations sur un exemple un peu moins simple

On considère ici les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et l'application $f \in F^E$ définie par

$$f(P) = \Big(\ t \ \mapsto \ (t-1)\widetilde{P}\,'(t) - 2\widetilde{P}(t) \ \Big)$$

où $\widetilde{P}$ désigne la fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ associée au pôlynôme P.

On a par exemple : $f(X^0) = (\ t \ \mapsto \ -2 \ )$

$f(X^1) = (\ t \ \mapsto \ -t-1 \ )$

et $f(X^2) = (\ t \ \mapsto \ -2t \ )$

On vérifie que $f \in \mathcal{L}(E,F)$, c'est-à dire que f est une **application linéaire** de E dans F en justifiant que :

$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a bien

$$\begin{aligned}
f(P+Q) &= \Big(\ t \ \mapsto \ (t-1)\ (\widetilde{P+Q})'(t) - 2(\widetilde{P+Q})(t) \ \Big) \\
&= \Big(\ t \ \mapsto \ (t-1)\widetilde{P}\,'(t) - 2\widetilde{P}(t) \ + \ (t-1)\widetilde{Q}\,'(t) - 2\widetilde{Q}(t) \ \Big) \\
&= \Big(\ t \ \mapsto \ (t-1)\widetilde{P}\,'(t) - 2\widetilde{P}(t) \ \Big) + \Big(\ t \mapsto \ (t-1)\widetilde{Q}\,'(t) - 2\widetilde{Q}(t) \ \Big) \\
&= \qquad\qquad f(P) \qquad\qquad + \qquad\qquad f(Q)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f(\lambda P) &= \Big(\ t \ \mapsto \ (t-1)(\widetilde{\lambda P})'(t) - 2(\widetilde{\lambda P})(t) \ \Big) \\
&= \Big(\ t \ \mapsto \ (t-1)\ \lambda\ \widetilde{P}\,'(t) - 2\ \lambda\ \widetilde{P}(t) \ \Big) \\
&= \lambda\ \Big(\ t \ \mapsto \ (t-1)\ \widetilde{P}\,'(t) - 2\ \widetilde{P}(t) \ \Big) \\
&= \lambda\ f(P)
\end{aligned}$$

Le noyau de f :

$$\begin{aligned}
Ker(f) &= \{P \in E \mid f(P) = 0_F\} \\
&= \big\{a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid \forall t \in \mathbb{R},\ (t-1)\ (a_1 + 2a_2t) - 2\ (a_0 + a_1t + a_2t^2) = 0\big\} \\
&= \big\{a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid \forall t \in \mathbb{R},\ -(2a_0 + a_1) - (a_1 + 2a_2)t = 0\big\}
\end{aligned}$$

Comme on sait qu'une fonction polynomiale réelle n'est nulle que si le polynôme qui la définit est le polynôme nul on en déduit que

$$Ker(f) = \left\{ a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{rcl} 2a_0 + a_1 & = & 0 \\ a_1 + 2a_2 & = & 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Il apparait ainsi que le système $\left\{ \begin{array}{rcl} 2a_0 + a_1 & = & 0 \\ a_1 + 2a_2 & = & 0 \end{array} \right.$ est un système d'équations de $Ker(f)$ dans la base (canonique) $(\ X^0, X^1, X^2\ )$ de E.

En résolvant ce système échelonné à l'aide de sa seule variable libre a_2 on met en évidence le fait que

$$\begin{aligned}
Ker(f) &= \big\{a_2X^0 - 2a_2X^1 + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \ \text{ tels que } a_2 \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \big\{a_2(X^0 - 2X^1 + X^2) \in \mathbb{R}_2[X] \ \text{ tels que } a_2 \in \mathbb{R}\big\} \\
&= Vect(X^0 - 2X^1 + X^2)
\end{aligned}$$

Le noyau de f est donc la droite vectorielle de $\mathbb{R}_2[X]$ de vecteur directeur $v = X^0 - 2X^1 + X^2$.

L'image de f :

Pour ce qui est de $Im(f)$, ici l'espace but $F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas de dimension finie, il ne possède donc pas de base et par conséquent son s.e.v $Im(f)$ ne peut être caractérisé par un système linéaire.

Néanmoins, comme E est de dimension finie on sait que $Im(f)$ l'est aussi, et on a $Im(f) = Vect(f(X^0), f(X^1), f(X^2))$.

La famille $(f(X^0), f(X^1), f(X^2))$ n'est pas libre car on a par exemple la relation non triviale

$f(X^0) - 2f(X^1) + f(X^2) = 0_F$ (la fonction nulle).

On en déduit que $Im(f) = Vect(f(X^0), f(X^1))$ et on peut voir qu'elle n'est autre que le plan vectoriel de F formé des fonctions affines $(t \mapsto at + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Comme ici F n'est pas de dimension finie, on ne peut pas associer de matrice à f.

Matrice d'une composée d'applications linéaires :

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, respectivement munis de bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ et

$$Mat(g \circ f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = Mat(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)\ Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

D) Matrices d'applications linéaires et changement des bases

E et F étant deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, on considère :
$\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}'_E = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases quelconques de E, ainsi que
$\mathcal{B}_F = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_p)$ et $\mathcal{B}'_F = (\epsilon'_1, \cdots, \epsilon'_p)$ deux bases quelconques de F.

Toute application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est alors représentée :
dans le couple de base $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ par la matrice $M = Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ et
dans le couple de base $(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)$ par la matrice $M' = Mat(f, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)$.

Propriété : ***Formule de changement des bases et matrices équivalentes***

Les matrices $M = Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ et $M' = Mat(f, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)$ de f sont liées par la relation

$$M' \;=\; Q^{-1}\; M\; P$$

où $P = P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}$ [resp. $Q = P_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F}$] est la matrice de changement de base à la source [resp. au but].

On dit dans ce cas que M et M' sont **des matrices équivalentes**.
Deux matrices équivalentes ont alors naturellement le même rang. On peut montrer réciproquement que deux matrices de même rang sont équivalentes.

Preuve de la formule de changement des bases :
En notant X_u et X'_u les colonnes de coordonnées d'un vecteur quelconque $u \in E$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$, et de manière analogue, Y_v et Y'_v les colonnes de coordonnées d'un vecteur quelconque $v \in F$ dans les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$, on a alors par définition de P, S, M, et M', pour tout $u \in E$ et tout $v \in F$:

$$X_u = P\; X'_u$$

$$Y_v = Q\; Y'_v$$

$$Y_{f(u)} \;=\; M\; X_u$$

$$Y'_{f(u)} \;=\; M'\; X'_u$$

On en déduit pour $v = f(u)$, et par simples substitutions, que pour tout $u \in E$

$$Q\; Y'_{f(u)} \;=\; Y_{f(u)} \;=\; M\; X_u = M\; P\; X'_u$$

et comme la matrice de passage Q est inversible, on a alors pour tout $u \in E$

$$Y'_{f(u)} \;=\; Q^{-1}\; M\; P\; X'_u$$

ce qui par unicité de M' met bien en évidence que $Q^{-1}\; M\; P \;=\; M'$.

E) Endomorphismes

Dans le cas où $E = F$ on parle alors d'endomorphismes de E.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, E)$ des endomorphismes de E est noté plus simplement $\mathcal{L}(E)$, ou encore $End(E)$.

Un endomorphisme bijectif, isomorphisme entre E et lui même, est appelé un **automorphisme** de E.
L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$ et on l'appelle le groupe linéaire de E car il a une structure naturelle de groupe (non commutatif) pour la loi de composition $\circ$.

Exemples généraux d'endomorphismes de E

Les homothéties vectorielles de E.
Les projections vectorielles associées à une paire de s.e.v supplémentaires dans E.
Les symétries vectorielles associées à une paire de s.e.v supplémentaires dans E.

Quelques exemples particuliers classiques d'endomorphismes

La dérivation des fonctions indéfiniment dérivables.
La dérivation des polynômes.
La transposition des matrices carrées de taille (n, n).
...

Matrice d'un endomorphisme dans une base de E

Dans le cas où E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, on convient de munir E de la **même base $\mathcal{B}_E$ à la source et au but** et la matrice $Mat(f, \mathcal{B}_E) \underset{déf}{=} Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)$ s'appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}_E$.

<u>Propriétés des matrices d'un endomorphisme</u> :

Pour un espace vectoriel E de dimension finie n, et un endomorphisme f de E, on a :

a) Toute matrice de f dans une base quelconque de E est **carrée** de **taille** (n, n).

b) Toutes les matrices de f sont **semblables** : pour tout changement de base de matrice P (inversible)

$$M' = P^{-1}\ M\ P$$

c) Injectivité, surjectivité et bijectivité sont des propriétés équivalentes pour l'endomorphisme f, et équivalentes au fait que l'une des matrices de f est inversible, et par conséquent équivalentes au fait qu'elles le sont toutes.

<u>Déterminant et trace d'un endomorphisme</u> :

<u>Proposition-Définition</u> : Toutes les matrices représentant un même endomorphisme f dans des bases différentes de E ont le même déterminant et elles ont aussi la même trace.

On parle alors du déterminant et de la trace de l'endomorphisme f.

<u>Preuve</u> : Ces matrices sont toutes semblables entre elles, les propriétés du déterminant et de la trace face au produit matriciel permettent alors de justifier très facilement cette proposition.