ALGEBRE 1 PC/SF-Physique

Fiche 8 : ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES ET NON DIAGONALISABLES

$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou plus généralement un corps commutatif, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

A) ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES - VECTEURS PROPRES ET VALEURS PROPRES

Définitions : Un endomorphisme f de E est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle f est représenté par une matrice diagonale.

Les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ d'une telle base sont appelés des **vecteurs propres de** f dans le sens où dans ce cas on a :

$\forall j \in \{1, \cdots, n\}$ $\exists \lambda_j \in \mathbb{K}$ tel que $\qquad f(u_j) = \lambda_j u_j$

On dit que λ_j est la **valeur propre associée** au vecteur propre u_j.
La matrice de f dans cette base $(u_1, \cdots, u_n)$ est alors précisément la matrice diagonale de termes diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme :

Définition : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de f s'il existe un vecteur non nul $v \in E$ tel que $f(v) = \lambda v$.

Vocabulaire : l'ensemble de toutes les valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le **spectre** de f, on le note $Spec(f)$.

Proposition : pour $\lambda \in \mathbb{K}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

a) λ est une valeur propre de f.

b) Le noyau de $(f - \lambda Id_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

c) Le rang de $(f - \lambda Id_E)$ est $< dim(E)$.

d) $(f - \lambda Id_E)$ n'est pas un automorphisme de E.

e) Le déterminant de $(f - \lambda Id_E)$ est nul.

f) λ est racine du polynôme $P_f(X) \underset{déf}{=} det(f - X\ Id_E)$ appelé **polynôme caractéristique de** f.

Valeurs propres simples et valeurs propres multiples : On définit l'ordre de multiplicité d'une valeur propre de f comme étant son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique $P_f(X)$.

Remarque : Un endomorphisme de E admet donc au plus n valeurs propres comptées avec multiplicité. En particulier il ne peut avoir plus de n valeurs propres simples.

Propriété fondamentale des vecteurs et valeurs propres d'un endomorphisme :

Si $u_1, \cdots, u_k$ sont des vecteurs propres non nuls de f de valeurs propres respectives $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ toutes distinctes alors $u_1, \cdots, u_k$ sont linéairement indépendants, et ils engendrent donc un s.e.v de dimension k de E.

Conséquence : Si f possède n valeurs propres simples alors f est diagonalisable.

Sous-espace propre E_λ associé à une valeur propre λ de f :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f, l'ensemble E_λ des vecteurs v de E tels que $f(v) = \lambda v$ est stable par combinaisons linéaires, on l'appelle le **sous-espace propre** de f **associé à la valeur propre** λ.

Remarque : $\qquad E_\lambda = ker(f - \lambda Id_E)$

Proposition : Si λ est une valeur propre de f de multiplicité m_λ alors

$$dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda$$

Conséquence : Si λ est une valeur propre simple de f alors E_λ est une droite vectorielle de E.

Propriété fondamentale des sous-espaces propres :

La somme des sous-espaces propres d'un endomorphisme est toujours une somme directe.

$$\sum_{\lambda \in Spec(f)} E_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in Spec(f)} E_\lambda$$

.

Théorème de caractérisation des endomorphismes diagonalisables :

Pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n, les assertions suivantes sont équivalentes :

a) f est diagonalisable.

b) Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

c) E est somme directe de tous les sous-espaces propres de f.

d) $\sum_{\lambda \in Spec(f)} E_\lambda = E$.

e) $\sum_{\lambda \in Spec(f)} dim(E_\lambda) = n$.

f) f admet n valeurs propres comptées avec multiplicité, et pour chacune d'elles la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité de celle-ci.

g) Toute matrice de f dans une base de E est semblable à une matrice diagonale (matrice diagonalisable).

B) Endomorphismes non diagonalisables

Proposition : Il existe des endomorphismes de E qui ne sont pas diagonalisables.

Il y a pour cela deux raisons possibles (et pas incompatibles) :

1) L'endomorphisme n'a pas assez de valeurs propres, comptées avec multiplicités.
2) L'endomorphisme a au moins une valeur propre multiple dont l'espace propre associé est de dimension strictement inférieure à la multiplicité de celle-ci.

Remarque : Les endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E ne sont concernés que par la seconde raison, le théorème fondamental sur les racines d'un polynôme complexe assure en effet dans ce cas toujours le bon nombre de valeurs propres (complexes) comptées avec multiplicités.

C) Illustrations sur divers exemples explicites

Projections vectorielles.
Symétries vectorielles.
Homothéties vectorielles.
Rotations vectorielles du plan, de l'espace.
Endomorphismes nilpotents.
...