Tout espace vectoriel est supposé de dimension finie.

Exercice 1. Calculer les valeurs propres et les espaces propres de

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. (*exercice de l'examens 2010 Algèbre 2*)

1. Quand dit-on qu'une matrice est diagonalisable ?
2. On considère les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Sont-elles diagonalisables ? Justifier vos réponses.
3. Calculer les puissances de A.

Exercice 3. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace de* A la somme des coefficients sur la diagonale : $\mathrm{tr}\,(A) = \sum_i a_{ii}$.

1. Montrer que si $n = 2$ alors le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I_2)$ de A est égale à $\lambda^2 - \mathrm{tr}\,(A)\lambda + \det(A)$.
2. Pour $n \geq 2$, reconnaître $\mathrm{tr}\,(A)$ entre les coefficients du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I_n)$. En déduire que si les matrices A et B sont semblables alors $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(B)$.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Proposer une définition de $\mathrm{tr}\,(f)$.

Exercice 4.

1. Considérons les matrices de rotation

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}.$$

   Diagonaliser A_θ sur $\mathbb{C}$. Montrer que A_{θ_1} et A_{θ_2} peuvent être diagonalisées simultanement.
2. Considérons les matrices de projection, $\theta \in \mathbb{R}$,

$$B_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}.$$

   Diagonaliser B_θ sur $\mathbb{R}$. Quelles conditions doivent satisfaire θ_1, θ_2 pour que B_{θ_1} et B_{θ_2} puissent être diagonalisées simultanement ?

Exercice 5. On se donne deux réels a, b et on considére la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 et par

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Pour quelles valeurs de a, b la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$$

   est-elle diagonalizable ?

2. Donner une forme générale pour u_n en termes de u_0, u_1 et n dans le cas suivants
   - $a = 1, b = 2$.
   - $a = 2, b = -2$.
   - $a = 2, b = -1$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que $f^2 = f$ (On dit que f est un projecteur).

1. Montrer que si $\lambda \in Sp(f)$ alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.
2. Montrer que f est diagonalisable.
   Indice : A une base de $\ker f$ ajouter une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que le polynôme caractéristique de f est $(\lambda - a)^2, a \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{B}$ de E tel que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est égale à une des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Programme de la première partie du cours :

Réduction des matrices :
sous-espaces caractéristiques, polynôme caractéristique, polynôme minimal, endomorphismes nilpotents, décomposition de Dunford.

References bibliographiques :

Jean-Marie Monier "Algèbre 2. Cours et exercices corrigés" Dunod
Xavier Gourdon " les maths en tête. Algèbre" elipses