UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2011/2012**
Faculté des Sciences L3 de Mathématiques
Département de Mathématiques Algèbre et Géométrie
Feuille d'exercices n^{o}1

Exercice 1. Calculer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice carrée P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Même question pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} -10 & -18 \\ 9 & 17 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice carrée P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ calculer A^n.
3. Trouver une matrice carrée B telle que $B^3 = A$.
4. Trouver une matrice carrée $C \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $C^2 = A$.
5. Montrer q'il n'existe pas de matrice $C \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$.

Exercice 3. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace de* A la somme des coefficients sur la diagonale : $\mathrm{tr}\,(A) = \sum_i a_{ii}$.

1. Montrer que si $n = 2$ alors le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I_2)$ de A est égale à $\lambda^2 - \mathrm{tr}\,(A)\lambda + \det(A)$.
2. Pour $n \geq 2$, reconnaître $\mathrm{tr}\,(A)$ entre les coefficients du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I_n)$. En déduire que si les matrices A et B sont semblables alors $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(B)$.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Proposer une définition de $\mathrm{tr}\,(f)$.

Exercice 4.

1. Considérons les matrices de rotation
$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}.$$
Diagonaliser A_θ sur $\mathbb{C}$. Montrer que A_{θ_1} et A_{θ_2} peuvent être diagonalisées simultanement.
2. Considérons les matrices de réflections,
$$B_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix},$$
où $\theta \in \mathbb{R}$. Diagonaliser B_θ (préciser la matrice de passage). Quelles conditions doivent satisfaire θ_1, θ_2 pour que B_{θ_1} et B_{θ_2} puissent être diagonalisées simultanément ?

Exercice 5. On se donne deux réels a, b et on considére la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 et par

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Donner une forme générale pour u_n en termes de u_0, u_1 et n dans le cas suivants
- $a = -1, b = 2$.
- $a = 4, b = -4$.

Exercice 6. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \mathrm{Id}_2$.

1. Montrer que si $\lambda \in Sp(A)$ alors $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$.
2. Soit $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $Av \neq v$. Montrer que $Av - v$ est un vecteur propre de A.
3. Montrer que tout $v \in \mathbb{R}^2$ est soit un vecteur propre de A soit s'écrit comme somme de deux vecteurs propres de A.
4. Montrer que A est diagonalisable.
   Indice : A une base de $\ker(A - \mathrm{Id}_2)$ ajouter une base de $\ker(A + \mathrm{Id}_2)$.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que le polynôme caractéristique de f est $(\lambda - a)^2, a \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{B}$ de E tel que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est égale à une des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.

1. Trouver toutes les matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ pour $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Trouver toutes les matrices $A \in M_2(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$ pour toute matrice $B \in M_2(\mathbb{C})$.

Programme de la première partie du cours :

Réduction des matrices :
sous-espaces caractéristiques, polynôme caractéristique, polynôme minimal, endomorphismes nilpotents, décomposition de Dunford.

References bibliographiques :

Jean-Marie Monier "Algèbre 2. Cours et exercices corrigés" Dunod
Xavier Gourdon " les maths en tête. Algèbre" elipses