UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS — **2011/2012**
Faculté des Sciences — L3 de Mathématiques
Département de Mathématiques — Algèbre et Géométrie
Feuille d'exercices 3

Exercice 1. On désigne par $\mathcal{P}_n$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré $\leq n$. $f : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, $f(P) = P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme nilpotent.
2. Calculer le polynôme minimal de f.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4. Chercher les endomorphismes f de E qui vérifient

$$(f^2 - f)(f - 2I)^2 = 0, \quad \text{avec } (f - 2I)^2 \neq 0 \text{ et } (f^2 - f)(f - 2I) \neq 0,$$

où I désigne l'application idéntique de E. Ces endomorphismes sont-ils diagonalisables ?

Exercice 5. Sous quelles conditions les matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 6. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 7. Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$. Montrer que

1. si A est nilpotente alors $\operatorname{tr} A^k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. si la trace $\operatorname{tr} A^k = 0$ pour $k = 1, 2, 3$ alors A est nilpotente.

Exercice 8. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente non-nulle

1. Montrer que $\det(I_n + A) = 1$.
2. Montrer que $I_n + A$ n'est pas diagonalisable.
3. Trouver dans $M_2(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente non nulle A et une matrice diagonale B telles que $A + B$ soit diagonalisable.

Exercice 9. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que AB et BA ont même polynoôme caractéristique. (On commencera par le cas où A est inversible ; dans le cas général, remplacer A pr $A + \lambda\mathrm{Id}$.)

Exercice 10. Toute matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée. (Utiliser la réduction de Jordan).

Exercice 11. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\ker A^n \cap \operatorname{Im} A^n = \{0\}$.