UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS — **2011/2012**
Faculté des Sciences — L3 de Mathématiques
Département de Mathématiques — Algèbre et Géométrie
feuille de TD 4

Pour un espace euclidien E on désigne par $S(E)$ l'ensemble des operateurs symétriques de E et par $O(E)$ l'ensemble des operateurs orthogonaux de E.

Exercice 1. Considérons la forme quadratique $q(x_1, x_2) = 7x_1^2 - 6x_1x_2 + 7x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

1. Soit f la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ telle que $q(x) = f(x, x)$. Écrire la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer le rang et la signature de q (on pourra décomposer q en somme des carrés par l'algorithme de Gauss). La forme f, est-elle un produit scalaire ?
3. Construire une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ qui diagonalise f.

Même pour $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Déterminer le rang et la signature des formes quadratiques suivantes :

1. $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - z^2 - 4yz + 2xz$.
2. $q(x, y, z, w) = 9x^2 - 6y^2 - 8z^2 + 6xy - 14xz + 18xw + 8yz + 12yw - 4zw$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne standarde, on note F le plan d'équation $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.
Déterminer l'orthogonal $F^{\perp}$. Expliciter la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique. Trouver une base orthogonale de F.

Exercice 4. Soit A une matrice symétrique réelle,. On suppose qu'il existe $k \geq 2$ entier tel que $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 5.

1. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible alors $B = ({}^tA)A$ est symétrique définie positive.
2. Inversement, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, montrer qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B = ({}^tA)A$.

Exercice 6.

1. Soient v, u deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que ${}^tvu =< v, u >$ et que la matrice $u{}^tv \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang ≤ 1.
2. Soient $A \in S(\mathbb{R}^n)$, λ, μ deux valeurs propres de A telles que $\lambda \neq \mu$, et v et u des vecteurs propres associés : $Av = \lambda v$ et $Au = \mu u$. Montrer que ${}^tvu = 0$ et $u{}^tv$ est une matrice nilpotente.

Exercice 7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

1. $({}^tA)A = I_n$.
2. $A({}^tA) = I_n$.
3. Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
4. Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. Montrer que $\det A = \pm 1$.
2. Supposons que $n = 2$ et $\det A = 1$. Montrer que A est une matrice de rotation.
3. Supposons que $n = 2$ et $\det A = -1$. Montrer que A est une symétrie orthogonale.
4. Supposons que $n = 3$ et $\det A = 1$. Montrer que A est une matrice de rotation. Déterminer l'axe de $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 9. Soit E un espace euclidien et $f \in O(E)$. Montrer que $\ker(f - id_E)$ et $\mathrm{Im}(f - id_E)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 10. Soit E un espace euclidien. Montrer que

1. Si $f \in S(E)$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k \in S(E)$.
2. Si $f \in S(E)$ et f est inversible alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f^k \in S(E)$.
3. Soit $f, g \in S(E)$. Alors $f \circ g \in S(E)$ si et seulement si $f \circ g = g \circ f$.