

Exercice 1. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

1. Répondre (sans calcul) aux questions suivantes :
Est-ce que les valeurs propres de A sont réelles ?
Existe-t-il une matrice unitaire U telle que UAU^{-1} est diagonale ?
2. Montrer qu'il existe une matrice hermitienne définie positive R telle que $R^2 = A$.
3. Existe-t-il une matrice hermitienne S telle que $S^2 = -A$?
4. Trouver une matrice unitaire U pour que UAU^{-1} soit diagonale.

Exercice 2. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, on définit :

$$q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\bar{x}_1x_2 - ix_1\bar{x}_2 + 2ix_2\bar{x}_3 - 2i\bar{x}_2x_3.$$

1. Vérifier qu'il existe une forme hermitienne f sur \mathbb{C}^3 telle que $q(x) = f(x, x)$, et écrire la matrice de f dans la base canonique
2. Montrer que f est un produit scalaire hermitien. (On pourra décomposer q en carrés de modules en s'inspirant de l'algorithme de Gauss).
3. Construire une base orthogonale de \mathbb{C}^3 pour ce produit scalaire hermitien.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel complexe. Déterminer le rang et la signature des formes quadratiques hermitiennes sur E suivantes :

1. $E = \mathbb{C}^3$ et $q(x, y, z) = x\bar{y} + y\bar{x} - ix\bar{z} + iz\bar{x} + (1+i)y\bar{z} + (1-i)z\bar{y}$.
2. $E = M_n(\mathbb{C})$ et $q(A) = \text{tr}(\bar{A}A)$.

Exercice 4. Dans \mathbb{C}^3 muni de sa structure hermitienne standard, on note F le plan d'équation $x_1 + x_2 + ix_3 = 0$.

Déterminer l'orthogonal F^\perp . Expliciter la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique. Trouver une base orthogonale de F .

Exercice 5. Soit E un espace hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$ l'on ait

$$\langle f(x)|x \rangle = 0.$$

Montrer que f est nul.

Que penser de l'énoncé analogue sur un espace euclidien ?

Exercice 6. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $U = \operatorname{Re}(A)$, $V = \operatorname{Im}(A)$ et $C = \begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix}$ (on a donc $C \in M_{2n}(\mathbb{R})$).

1. Montrer que A est hermitienne définie positive ssi C est symétrique définie positive.
2. Montrer que A est unitaire ssi C est orthogonale.

Exercice 7.

1. Soit $H \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne positive. Montrer qu'il existe une unique matrice hermitienne positive R telle que $H = R^2$. On dit alors que R est la racine carrée de H .
2. Soit $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (U, H) avec U unitaire et H hermitienne positive tel que l'on ait

$$A = UH.$$

Cette décomposition s'appelle la décomposition polaire de A .

[**Indication** : Raisonner par condition nécessaire et montrer que si de tels U et H existent alors H est la racine carrée de A^*A .]