

**Exercice 1.**

- a) Rappeler la définition du polynôme minimal d'une matrice carrée à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .
- b) Donner exemple d'une matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  dont le polynôme minimal n'est pas égale à son polynôme caractéristique.

**Exercice 2.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Quel est le polynôme minimal de  $A$  ?
- b) Trouver une matrice carrée  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.
- c) Trouver une matrice carrée  $B \in M_2(\mathbb{C})$  telle que  $B^2 = A$ .
- d) Montrer qu'il n'existe pas de matrice  $B \in M_2(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A$ .
- e) Proposer une matrice carrée  $C \in M_2(\mathbb{C})$  telle que  $AC \neq CA$ .
- f) Calculer  $P(A)$  pour  $P = X^5$  puis pour  $P = X^5 + 2X - 1$ .