UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

Faculté des Sciences Département de Mathématiques L3 de Mathématiques Algèbre et Géométrie Interrogation écrite. Durée 30 minutes.

Exercice 1.

- a) Rappeler la définition du polynôme minimal d'une matrice carrée à coefficients dans \mathbb{R} .
- b) Donner exemple d'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal n'est pas égale à son polynôme caractéristique.

Exercice 2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
.

- a) Quel est le polynôme minimal de A?
- b) Trouver une matrice carrée P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- c) Trouver une matrice carrée $B \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.
- d) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
- e) Proposer une matrice carrée $C \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $AC \neq CA$.
- f) Calculer P(A) pour $P = X^5$ puis pour $P = X^5 + 2X 1$.