L3 : ALGEBRE ET GEOMETRIE (2010)
Feuille d'exercices 6

On désigne par E un espace hermitien de dimension finie .

Exercice I. Soit $(E, < \bullet, \bullet >)$ un espace vectoriel hermitien de dimension complexe n. On désigne par $E_{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$- espace vectoriel sous-jacent à E .

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire euclidien $(\bullet|\bullet)$ sur $E_{\mathbb{R}}$ en posant $(x|y) = Re < x, y >$.

2. Inversement, montrer comment un produit scalaire euclidien $(\bullet|\bullet)$ sur $E_{\mathbb{R}}$ vérifiant
$$(ix|iy) = (x|y) \quad (*)$$
donne lieu à un produit hermitien $(E, < \bullet, \bullet >)$ sur E dont le produit scalaire associé par 1. sur $E_{\mathbb{R}}$ est $(\bullet|\bullet)$.
Indice: $< x, y >= (x|y) - i(ix|y)$

3. Donner un exemple de produit scalaire euclidien sur $E_{\mathbb{R}}$ ne vérifiant pas $(*)$.

Exercice II. Prouver qu'un endomorphisme f de E est normal si et seulement si pour tout $x \in E$ on a $||f(x)|| = ||f^*(x)||$
Indice: on pourra utiliser que $(\forall x \in E, \ < ux, x >= 0) \Rightarrow u = 0$ (cf. feuille 5, exercice 4)

Exercice III. Une matrice symétrique réelle dont toutes les entrées sont strictement positives est-elle positive?

Exercice IV. Prouver qu'un endomorphisme nilpotent normal de E est nul. Trouver un énoncé plus général et plus facile.

Exercice V. Montrer qu'on peut avoir deux endomorphismes $f, g \in End(E)$ de E tels que $f \circ g$ soit normal mais que $g \circ f$ ne le soit pas.

Exercice VI. Donner un endomorphisme normal d'un espace hermitien qui ne soit ni hermitien ni unitaire.

Exercice VII. a) Si f est un endomorphisme normal E, il en est de même, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, de $f - \lambda I$.
b) Les endomorphismes normaux de E forment-ils un sous-espace complexe (resp. réel) de $End(E)$?

Exercice VIII. Soit f un endomorphisme normal de E. Donner une condition nécessaire et suffisante en termes des valeurs propres de f pour que cet endomorphisme soit unitaire, resp. hermitien, resp. positif, resp. défini positif.

Exercice IX Prouver qu'une matrice unitaire triangulaire est diagonale. Généralisation: prouver qu'une matrice normale triangulaire est diagonale.

Exercice X. Soient f et g deux endomorphismes normaux de E qui commutent. Prouver que

1. f et g sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée.
2. f et g^* commutent.
3. Les endomorphismes $f + g$ et $f \circ g$ sont aussi normaux.

Exercice XI Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Posons pour $k = 1, 2, \ldots, n$, $M_k = \det(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$

1. Prouver que A est définie négative si et seulement si $(-1)^k M_k > 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.
2. Considérons le cas $n = 2$. Montrer que A est positive si et seulement si $a_{11} \geq 0, a_{22} \geq 0$ et $\det A \geq 0$. Proposer un critère similaire pour $n = 3$.