UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2010/2011
L3 de Mathématiques
Algèbre et Géométrie
feuille de TD 4

Pour un espace euclidien E on désigne par $S(E)$ l'ensemble des operateurs symétriques de E et par $O(E)$ l'ensemble des operateurs orthogonaux de E.

Exercice 1. Diagonaliser dans une base orthonormée les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels, et symétrique. On suppose qu'il existe $k \geq 2$ entier tel que $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 3.

1. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible alors $B = {}^tAA$ est symétrique définie positive.
2. Inversement, si $B \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, montrer qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tAA$.

Exercice 4. Completer $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien et soit $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ la norme associée. Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|y\|^2 + \|x\|^2).$$

Exercice 6.

1. Soient v, u deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que ${}^tvu =< v, u >$ et que la matrice $u^tv \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang ≤ 1.
2. Soient $A \in S(\mathbb{R}^n)$, λ, μ deux valeurs propres de A telles que $\lambda \neq \mu$, et v et u des vecteurs propres associés : $Av = \lambda v$ et $Au = \mu u$. Montrer que ${}^tvu = 0$ et u^tv est une matrice nilpotente.

Exercice 7. Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E. Soit $e_1, \ldots, e_m$ une base orthonormée de F. Montrer que $p_F : E \to E$

$$p_F(v) = \sum_{i=1}^{m} < v, e_i > e_i$$

est la projection orthogonale sur F (c.à.d. p_F est symétrique, $p_F \circ p_F = p_F$, $\operatorname{Im} p_F = F$ et $\ker p_F = F^{\perp}$).

Exercice 8. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

1. ${}^tAA = I_n$.
2. $A{}^tA = I_n$.
3. Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
4. Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 9. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. Montrer que $\det A = \pm 1$.
2. Supposons que $n = 2$ et $\det A = 1$. Montrer que A est une matrice de rotation.
3. Supposons que $n = 2$ et $\det A = -1$. Montrer que A est une symétrie orthogonale.

Exercice 10. Montrer que la matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation. En déterminer l'angle et l'axe.

Exercice 11.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et orthogonale. Montrer que A est une symétrie orthogonale, c.à.d. $A^2 = I_n$.
2. Supposons, en plus, A définie positive. Montrer que $A = I_n$.

Exercice 12. Soit E un espace euclidien et $f \in O(E)$. Montrer que $\ker(f - id_E)$ et $\operatorname{Im}(f - id_E)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.