UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS — **2010/2011**

Faculté des Sciences — L3 de Mathématiques

Département de Mathématiques — Algèbre et Géométrie

Examen. Durée 2 heures

Documents, téléphones portables, calculatrices sont interdits.
Justifier toute réponse. À moins que l'énoncé d'une question ne vous dise le contraire, vous pouvez utiliser librement les résultats du cours sans les redémontrer. Ces résultats doivent être citer correctement.

Corrigé :

Exercice 2.

1. Donner une réduction de type Dunford ou Jordan de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. Quel est le polynôme minimal de A ?

La décomposition de Dunford est

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la base e_1, $e_1 + e_2$, $e_2 + e_3$ la matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme minimal est $(X + 1)^2(X + 2)$

Exercice 1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Compléter l'enoncé suivant :
(Décomposition de Dunford.) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est .... sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un couple $d \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathcal{L}(E)$ tel que*
   - *(i)* $f = d + n$
   - *(ii)* d *est* .... *et* n *est* ....
   - *(iii)* $d \circ n = \cdots\cdots$.

   De plus, d est n sont des polynômes en f, c.à.d. il existe des polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ tels que $d = P(f)$ et $n = Q(f)$.
2. (a) Soient $n \in \mathcal{L}(E)$ et $n' \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes nilpotents de E tels que $n \circ n' = n' \circ n$. Montrer que $n - n'$ est nilpotent.
(Indice : formule du binôme)

   (b) Soient $d \in \mathcal{L}(E)$ et $d' \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables de E tels que $d \circ d' = d' \circ d$. Montrer que $d - d'$ est diagonalisable.

(c) Montrer que si $g \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et nilpotent alors $g = 0$.

(d) (Unicité de la décomposition de Dunford). Soit $f = d + n = d' + n'$ deux décompositions de Dunford de f. Déduire de (a), (b) et (c) que $d = d'$ et $n = n'$,

"scindé", "diagonalisable", "nilpotent", $d \circ n = n \circ d$.
Soit $N = \dim E$. Alors $n^N = 0$ et $n'^N = 0$ et

$$(n - n')^{2N} = \sum_{i=o}^{2N} (-1)^{2N-i} \binom{2N}{i} n^i (n')^{2N-i}$$

est nul puisque soit $i \geq N$ soit $2N - i \geq N$
Par un résultat du cours on peut diagonaliser d et d' dans la même base et la difference de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
On peut supposer g diagonale : $g = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$. Alors $0 = g^N = Diag(\lambda_1^N, \ldots, \lambda_N^N)$. D'où $\lambda_i = 0$ pour tout i.
Si $d + n = d' + n$ alors $d' - d = n - n'$. En plus, d commute avec f et aussi avec d' qui est un polynôme en f. Donc $d' - d = n - n'$ est à la fois diagonalisable et nilpotent et donc après (c) nul.

Exercice 2.

1. Donner une réduction de type Dunford ou Jordan de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. Quel est le polynôme minimal de A ?

La décomposition de Dunford est

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la base e_1, $e_1 + e_2$, $e_2 + e_3$ la matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme minimal est $(X + 1)^2(X + 2)$

Exercice 3. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

1. Répondre (sans calcul) aux questions suivantes :
   Est-ce que les valeurs propres de A sont réelles ?
   Existe-t-il une matrice unitaire U telle que UAU^{-1} est diagonale ?
2. Montrer qu'il existe une matrice hermitienne définie positive R telle que $R^2 = A$.
3. Existe-t-il une matrice hermitienne S telle que $S^2 = -A$?

1. "oui" et "oui" puisque A est hermitienne
2. Il faut vérifier que A est définie positive. On utilise le critère de Sylvester.
3. Non. Supposons par absurde qu'une telle S existe. Les valeurs propres de $-A$ sont réeles strictement négatives et celles de S réelles. Mais pour un vecteur propre v de S de valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$-Av = S^2 v = \lambda^2 v$$

L'absurde.

Exercice 4. Parmi les propositions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre exemple pour celles qui sont fausses.

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in GL(E)$ un endomorphisme inversible. Alors f^{-1} est un polynôme en f, c.à.d. il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $f^{-1} = P(f)$.
2. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$ l'on ait
$$\langle f(x)|x\rangle = 0.$$
Alors f est nul.
3. Toute matrice symétrique réelle dont tous les coefficients sont strictement positifs est définie positive.
4. Toute matrice orthogonale et triangulaire supérieure est diagonale.

1. Oui. Soit $\chi_f(X) = X^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ le polynôme caractéristique de f, $a_n \neq 0$ puisque 0 n'est pas une valeur propre de f. Alors

$$I_E = f\frac{-1}{a_n}(f^{n-1} + a_1 f^{n-2} + \cdots a_2).$$

2. NON. Nous pouvons prendre comme exemple la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\pi/2$.
3. NON. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est négative.
4. OUI. Si A est triangulaire supérieure et orthogonale alors A^{-1} est triangulaire supérieure et ${}^tA$ est triangulaire inférieure. Mais $A^{-1} = {}^tA$, donc ${}^tA$ doit être diagonale.