Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver un polynôme qui annule A.
Calculer $P(A)$ pour $P(X) = X^5$ puis pour $P(X) = X^5 + 2X^2 - 1$.

Exercice 2 Calculer $P(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^4 - 2X - 2$.

Exercice 3 Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer le polynôme minimal de A. En déduire A^{-1}, A^3 et A^5.

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Trouver un polynôme P tel que $P(A) = A^{-1}$.
Montrer que pour toute matrice inversible A il existe un polynôme P tel que $P(A) = A^{-1}$.
Qu'en est il si on remplace matrice inversible par endomorphisme bijectif d'un espace vectoriel ?

Exercice 5 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Existe il un polynôme P tel que $A = P(B)$? Tel que $B = P(A)$? Même question avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis avec $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Soit E un espace vectoriel de dimension n, et u un endomorphisme de E nilpotent, c'est-à-dire tel qu'il existe un entier $m \geqslant 0$, tel que $u^m = 0$. Montrer que $u^n = 0$. Quel est le polynôme caractéristique de u ?

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $\mathrm{Id} + u$ est inversible et déterminer son inverse comme un polynôme en u.

Exercice 8 Déterminer les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme minimal est de degré 1.

Exercice 9 Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4 et u un endomorphisme de E dont on donne ci-dessous la matrice dans une base fixée de E :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de u. Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2. Pourquoi u est-il non diagonalisable ? Est-il triangularisable ?
2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques F_1 et F_2. Pour $k = 1, 2$, donner l'ordre β_k du nilpotent $(u - \lambda_k.\mathrm{id}_E)|_{F_k}$ ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$).
3. Si $x \in F_2$ et $x \notin \ker(u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 1}$, montrer que $f_1 = (u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2-1}(x)$, $f_2 = (u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2-2}(x)$, $\ldots$, $f_{\beta_2} = x$ forment une base de F_2.
4. On note $f = \{f_1, \ldots, f_4\}$ la complétée de la base précédente par une base de F_1. Vérifier que $T = [u]_f^f$ est triangulaire. Décomposer T sous la forme $D + N$, où D est diagonale, N est nilpotente, et $DN = ND$. Calculer T^5.
5. Expliciter un polynôme P tel que $P(u)$ soit le projecteur de E sur F_2 parallèlement à F_1. Comment peut on en déduire une base de F_2 ?
6. Peut on trouver un polynôme P tel que $P(u)$ soit un projecteur d'image E_2 ?

Exercice 10 Donner une réduction de type Dunford (ou Jordan) des endomorphismes dont les matrices dans la base canonique sont :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

,

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$