Exercice 1 Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ des scalaires et A la matrice *« compagnon »*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 2 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{GL}(E)$ un endomorphisme inversible. Montrer que f^{-1} est un polynôme en f.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel de dimension n, et u un endomorphisme de E nilpotent, c'est-à-dire tel qu'il existe un entier $m \geqslant 0$, tel que $u^m = 0$. Montrer que $u^n = 0$. Quel est le polynôme caractéristique de u ?

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $\mathrm{Id} + u$ est inversible et déterminer son inverse comme un polynôme en u.

Exercice 5 Déterminer les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme minimal est de degré 1.

Exercice 6 Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer le polynôme minimal de A. En déduire A^{-1}, A^3 et A^5.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4. Soit :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base canonique de E.

1. Calculer le polynôme caractéristique de u. Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2. Pourquoi u est-il non diagonalisable ? Est-il triangularisable ?
2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques F_1 et F_2. Pour $k = 1, 2$, donner l'ordre β_k du nilpotent $(u - \lambda_k.\mathrm{id}_E)|_{F_k}$ ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$).
3. Si $v \in F_2$ et $v \notin \ker(u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 1}$, montrer que $f_1 = (u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 1}(v)$, $f_1 = (u - 2.\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 2}(v)$, $\dots$, $f_{\beta_2} = v$ forment une base de F_2.

4. On note $f = \{f_1, \ldots, f_4\}$ la complétée de la base précédente par une base de F_1. Vérifier que $T = [u]_f^f$ est triangulaire. Décomposer T sous la forme $D + N$, où D est diagonale, N est nilpotente, et $DN = ND$. Calculer T^5.

Exercice 8 Donner une réduction de type Dunford (ou Jordan) des endomorphismes dont les matrices dans la base canonique sont :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

,

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$