L3 : Algèbre et Géométrie (2010)
Feuille d'exercices 3

On désigne par Pol_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré $\leq n$.
Pour $a \in \mathbb{R}$ on désigne par ev_a la forme linéaire $ev_a : P_n \to \mathbb{R} : f \mapsto f(a)$.

Exercice I
Calculer la base duale de la base $(-1, 2), (0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$

Exercice II
Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $W \subset V$ un sous-espace.
a) Montrer que la transposée de l'inclusion $j : W \to V$ est surjective.
b) Montrer que la transposée de l'application de passage au quotient $p : V \to V/W$ est injective.

Exercice III
Soient V un espace vectoriel, $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de V et $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ des formes linéaires sur V. Si la matrice $(\phi_i(v_j))$ est inversible, prouver que les v_j forment une partie libre de V et que les ϕ_i forment une partie libre de V^*. Si V est de dimension finie n, en déduire que les v_j (resp. les ϕ_i) sont une base de V (resp.de V^*)

Exercice IV
Montrer que pour $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts les formes linéaires $ev_{a_i} (i = 0, 1, \ldots, n)$ constituent une base de P_n^*.
Illustration: Démontrer qu'il existe des constantes $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ telles que pour tout polynôme $f \in P_n$ on ait

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} c_i f(\frac{i}{n})$$

Exercice V. (Polynômes interpolateurs de Lagrange)
Etant donnés des réels distincts $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, trouver la base (f_{a_i}) de P_n dont la base duale est la famille des formes linéaires $ev_{a_i} (i = 0, 1, \ldots, n)$.
Ecrire le développement d'un polynôme $f(X) \in P_n$ dans cette base
Indication: Evaluer le polynôme $F_{a_i}(X) = (X - a_0)(X - a_1)...(X - a_{i-1})(X - a_{i+1})...(X - a_n)$ en les réels donnés et en déduire que $f_{a_i}(X)$ est un multiple scalaire de $F_{a_i}(X)$.

Exercice VI.
a) Trouver la base duale $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ de la base $1, X, X^2, ..., X^n$ de P_n. Expliciter $\delta_i(f)$ pour $f \in P_n$.
b) Quelle formule d'Analyse correspond à $f(X) = \sum_{i=0}^{n} \delta_i(f(X))X^i$?
c) Démontrer que toute famille de polynômes (non nuls !) de degrés distincts est libre dans P_n.
d) On fixe $a \in \mathbb{R}$. Reprendre les questions a) et b) en utilisant la base $((X-a)^i), (i = 0, ..., n)$ de P_n.

Exercice VII.
a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie E et $u^* \in E^*$ son transposé. Prouver que ces endomorphismes ont même polynôme caractéristique et donc mêmes valeurs propres.
b) Montrer que si $x \in E$ est un vecteur propre de u et $\phi \in E^*$ un vecteur propre de u^* de valeur propre différente, alors $\phi(x) = 0$.
c) On considère une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$ et la décomposition duale $E^* = F^0 \oplus G^0$. Expliciter l'endomorphisme p^* transposé du projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ de E sur F le long de G.

Exercice VIII.
Prouver que l'endomorphisme de transposition $trans : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et calculer ses espaces propres.