Espaces hermitiens

L3

algèbre et géométrie

Exercice 1 Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, on définit :

$$q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\overline{x_1}x_2 - ix_1\overline{x_2} + 2ix_2\overline{x_3} - 2i\overline{x_2}x_3.$$

1. Vérifier qu'il existe une forme hermitienne f sur $\mathbb{C}^3$ telle que $q(x) = f(x, x)$, et écrire la matrice de f dans la base canonique
2. Montrer que f est un produit scalaire hermitien. (On pourra décomposer q en carrés de modules en s'inspirant de l'algorithme de Gauss).
3. Construire une base orthogonale de $\mathbb{C}^3$ pour ce produit scalaire hermitien.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel complexe. Déterminer le rang et la signature des formes quadratiques hermitiennes sur E suivantes :

1. $E = \mathbb{C}^3$, et $q(x, y, z) = x\overline{x} - ix\overline{y} + iy\overline{x} - x\overline{z} - z\overline{x} + 2y\overline{y} - 2iy\overline{z} + 2iz\overline{y} + z\overline{z}$.
2. $E = \mathbb{C}^3$ et $q(x, y, z) = x\overline{y} + y\overline{x} + ix\overline{z} - iz\overline{x} + (1 + i)y\overline{z} + (1 - i)z\overline{y}$.
3. $E = M_n(\mathbb{C})$ et $q(A) = \mathrm{tr}(\overline{A}A)$.

Exercice 3 Dans $\mathbb{C}^3$ muni de sa structure hermitienne standard, on note F le plan d'équation $x_1 - x_2 + ix_3 = 0$.
Déterminer l'orthogonal $F^\perp$. Expliciter la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique. Trouver une base orthogonale de F.

Exercice 4 Soit E un espace hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$ l'on ait

$$\langle f(x)|x\rangle = 0.$$

Montrer que f est nul.
Que penser de l'énoncé analogue sur un espace euclidien ?

Exercice 5 Est-ce que l'ensemble des matrices hermitiennes forme un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$? Montrer qu'elles forment un sous-espace vectoriel réel, et calculer la dimension (sur $\mathbb{R}$) de ce sous-espace.

Exercice 6 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire U et une matrice diagonale D telle que $D = U^{-1}AU$.
Même question avec

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 7 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $U = \mathrm{Re}(A)$, $V = \mathrm{Im}(A)$ et $C = \begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix}$ (on a donc $C \in M_{2n}(\mathbb{R})$).

1. Montrer que A est hermitienne définie positive ssi C est symétrique définie positive.
2. Montrer que A est unitaire ssi C est orthogonale.

Exercice 8 Soit U une matrice unitaire de taille 2 et de déterminant 1. Montrer qu'il existe des nombres complexes α et β avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ tels que

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Exercice 9 Soit $H \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne positive. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on note H_k la matrice « tronquée » constituée des k premières lignes et k premières colonnes.
Montrer que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, la matrice H_k est encore hermitienne positive et que $\det H_k \geqslant 0$.

Exercice 10

1. Soit $H \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne positive. Montrer qu'il existe une unique matrice hermitienne positive R telle que $H = R^2$. On dit alors que R est la racine carrée de H.
2. Soit A in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (U, H) avec U unitaire et H hermitienne positive tel que l'on ait

   $$A = UH.$$

   Cette décomposition s'appelle la décomposition polaire de A.

   [**Indication :** Raisonner par condition nécessaire et montrer que si de tels U et H existent alors H est la racine carrée de A^*A.]