UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2011/2012**
Faculté des Sciences L3 de Mathématiques
Département de Mathématiques Algèbre et Géométrie
Partiel. Durée 1h25m.

Documents, téléphones portables, calculatrices sont interdits.
Justifier toute réponse. À moins que l'énoncé d'une question ne vous dise le contraire, vous pouvez utiliser librement les résultats du cours sans les redémontrer. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Rappeler la définition d'un endomorphisme nilpotent de E.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Montrer que $Id+u$ est inversible et déterminer son inverse comme un polynôme en u.
3. Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente non-nulle. Montrer que :
   (a) $\det(I_n + N) = 1$.
   (b) $\ker N \cap \operatorname{Im} N \neq \{0\}$.
4. Pour quels nombres complexes a, b, c, d la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$
est-elle nilpotente ?

Exercice 2. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont on donne ci-dessous la matrice dans la base canonique :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les espaces propres et les espaces caractéristiques de u. Pourquoi u est-il non diagonalisable ?
2. Calculer le polynôme minimal de u. En déduire A^{-1}, A^3 et A^5.
3. Désignons les espaces caractéristiques de u par F et F' . Expliciter un polynôme P_1 tel que $P_1(u)$ soit le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F' parallèlement à F, et un polynôme P_2 tel que $P_2(u)$ soit le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à F'.
4. Donner dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ les matrices des endomorphismes d et n tels que $u = d + n$, d et n commutent, d est diagonalisable et n est nilpotent.
5. Donner une base dans laquelle la matrice de u est de la forme de Jordan.