UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2011/2012**
Faculté des Sciences L3 de Mathématiques
Département de Mathématiques Algèbre et Géométrie
Partiel. Durée 1h25m.

Exercice 1.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Rappeler la définition d'un endomorphisme nilpotent de E.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Montrer que $Id+u$ est inversible et déterminer son inverse comme un polynôme en u.
3. Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente non-nulle. Montrer que :
   (a) $\det(I_n + N) = 1$.
   (b) $\ker N \cap \operatorname{Im} N \neq \{0\}$.
4. Pour quels nombres complexes a, b, c, d la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

est-elle nilpotente ?

1. Un endomorphisme u de E est nilpotent s'il existe $m \geq 0$ tel que $u^m = 0$.
(De manière équivalente on peut demander que $u^n = 0$. Si le corps est algébriquement clos (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) alors u est nilpotent si et seulement si toutes les valeurs propres de u sont nulles).

2. $(Id+u)(Id-u+u^2-\cdots+(-1)^{n-1}u^{n-1}) = Id+(-1)^n u^n = Id$. Alors $(Id+u)$ est inversible (possède un inverse) et $(Id+u)^{-1} = Id-u+u^2-\cdots+(-1)^{n-1}u^{n-1}$.

3. (a) Soit X^m, $m > 1$, le polynôme minimal de N. Alors $(X-1)^m$ est le polynôme minimal de $I_n + N$ et donc le polynôme caractéristique de $I_n + N$ est $\chi(X) = (-1)^n(X-1)^n$. Alors $\det(I_n + N) = \chi(0) = 1$.
(b) Soit X^m, $m > 1$, le polynôme minimal de N. Alors $N^{m-1} \neq 0$ et $\dim \operatorname{Im} N^{m-1} > 0$. Soit $v = N^{m-1}(u) \neq 0$. Alors $Nv = N^m u = 0$ et $v \in \ker N \cap \operatorname{Im} N$.

4. A est une matrice compagnon et par un resultat du cours son polynôme caractéristique est $X^4 - (dX^3 + cX^2 + bX + a)$. Alors pour que A soit nilpotente il faut et il suffit que $a = b = c = d = 0$.

Exercice 2. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont on donne ci-dessous la matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les espaces propres et les espaces caractéristiques de u. Pourquoi u est-il non diagonalisable ?
2. Calculer le polynôme minimal de u. En déduire A^{-1}, A^3 et A^5.
3. Désignons les espaces caractéristiques de u par F et F' . Expliciter un polynôme P_1 tel que $P_1(u)$ soit le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F' parallèlement à F, et un polynôme P_2 tel que $P_2(u)$ soit le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à F'.
4. Donner dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ les matrices des endomorphismes d et n tels que $u = d + n$, d et n commutent, d est diagonalisable et n est nilpotent.
5. Donner une base dans laquelle la matrice de u est de la forme de Jordan.

1. $\chi_A(X) = -(X-2)(X+1)^2 = -(X^3 - 3X - 2)$. *Les espaces propres et les espaces caractéristiques sont* $E_{-1} = Vect\{v_1\}$, $F_{-1} = Vect\{v_1, v_2\}$, $E_2 = F_2 = Vect\{v_3\}$, *où* $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,-2)$, $v_3 = (0,-1,1)$. *u n'est pas diagonalisable parce que* $E_{-1} \neq F_{-1}$.

2. Le polynôme minimal est $\pi_u = -\chi_A = X^3 - 3X - 2$. *Ça donne* $A(A^2 - 3) = 2$ *et*

$$A^{-1} = (A^2 - 3I)/2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & -3 & -5/2 \end{pmatrix} \text{ puisque } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par la division euclidienne $X^3 = (X^3 - 3X - 2) + (3X + 2)$ *et* $X^5 = (X^3 - 3X - 2)(X^2 + 3) + (2X^2 + 9X + 6)$. *Ça donne*

$$A^3 = 3A + 2I = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & 17 & 9 \\ 0 & -18 & -10 \end{pmatrix}, \; A^5 = 2A^2 + 9A + 6I = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -5 \\ 0 & 65 & 33 \\ 0 & -66 & -34 \end{pmatrix}.$$

3. Par la division euclidienne $9 = (X+1)^2 - (X+4)(X-2)$. *Si* $P_1 = (X+1)^2/9$ *et* $P_2 = -(X+4)(X-2)/9$ *alors* $P_1(u)$ *et le projecteur de* $\mathbb{R}^3$ *sur* F_2 *parallèlement à* F_{-1}, *et* $P_2(u)$ *et le projecteur de* $\mathbb{R}^3$ *sur* F_{-1} *parallèlement à* F_2.

4. $d = 2P_1(u) - P_2(u)$ *et* $n = u - d$. *(voir aussi le point suivant)*

5. La base $\{v_1, v_2, v_3\}$ *de 1. convient. Alors la réduction de Jordan est*

$$P^{-1}AP == \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La réduction de Dunford $A = D + N$ *est*

$$D = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}, \quad N = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$