UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences Préparation à l'agrégation
Département de Mathématiques Développement : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos
Références : P. Samuel, Théorie algébrique des nombres.

Théorème. (D'Alembert, Gauss)
Tout polynôme de degré > 0 à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Ingrédients.

a) Tout polynôme de degré impair à coefficients dans $\mathbb{R}$ admet une racine dans $\mathbb{R}$.
b) Tout polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.
c) Étant donnés un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme de degré > 0, $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, il existe une extension $\mathbb{K}'$ de $\mathbb{K}$ telle que $P(X)$ se decompose en facteurs de degré 1 en $\mathbb{K}'[X]$. (Indice : Si P est irréductible alors P possède une racine dans $\mathbb{K}' = \mathbb{K}[X]/(P)$.)
d) Tout polynôme symétrique de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme en polynômes symétriques élémentaires.
e) Soit $F(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i) \in \mathbb{K}[X]$, $x_i \in \mathbb{K}'$. Soit $c \in \mathbb{K}$. Posons, pour $i < j$,

$$y_{ij}(c) = x_i + x_j + cx_ix_j,$$

Montrer que $y_{ij}(c)$ sont des racines d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $n(n-1)/2$.

Preuve. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P > 0$. Montrons que P admet une racine dans $\mathbb{C}$.

a) Il suffit de considérer P à coefficients réels. (Remplacer P par $P\bar{P}$.)
b) Soit $\deg P = n = 2^d(2k+1)$. On procède par récurrence sur d.
   (a) Montrer le resultat pour $d = 0$.
   (b) Soit $d > 0$. Soient $x_1, \dots, x_n$ les racines de P dans une extension finie de $\mathbb{R}$. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer, en utilisent la récurrence sur d, qu'il existe $i < j$ tels que $y_{ij}(c) = x_i + x_j + cx_ix_j \in \mathbb{C}$.
   (c) Montrer qu'il existe $c_1 \neq c_2$, et $i < j$ tels que $y_{ij}(c_1) \in \mathbb{C}$ et $y_{ij}(c_2) \in \mathbb{C}$.
   (d) Si $y_{ij}(c_1) \in \mathbb{C}$ et $y_{ij}(c_2) \in \mathbb{C}$, avec $c_1 \neq c_2$, alors $x_i \in \mathbb{C}$ et $x_j \in \mathbb{C}$.

Discussion.

a) Il n'existe pas de démonstration purement algébrique du théorème d'Alembert-Gauss. Dans la démonstration ci-dessus, quel argument n'est pas algébrique ? Quels propriétés de $\mathbb{R}$ on utilise.
b) Le théorème n'est pas vrai si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$. Quels arguments de la démonstration ne fonctionnent pas dans ce cas ?